UVIC UNIVERSITAT DE VIC
Facultat d'Educació,
Traducció i Ciències Humanes

ESTUDI DE LA COMPRENSIÓ I DE LES ESTRATÈGIES PER RESOLDRE PROBLEMES DE SUMA I RESTA

Treball de Final de Grau de Mestre
d'Educació Primària

MIREIA JURADO i SALVANS

Curs 2013-14

Tutora: Isabel Sellas i Ayats

Universitat de Vic

16 - 5 - 13

RESUM

Aquest treball de recerca estudia i analitza la comprensió i les estratègies utilitzades per alumnes de 2n de primària a l'hora de resoldre problemes aritmètics de suma i resta.

Per aconseguir aquest propòsit, s'ha portat a terme el disseny i l'aplicació d'una prova individual de resolució de problemes, passada abans i després d'una intervenció educativa enfocada a millorar les dificultats detectades a l'hora de resoldre problemes. A partir de l'anàlisi de les dades obtingudes es verificarà si després de treballar el procés de resolució i d'incidir en les estratègies per resoldre problemes additius amb els alumnes millora la comprensió i les estratègies aparegudes s'adeqüen al tipus d'operació aritmètica que es demana.

Paraules clau: procés de resolució de problemes, problemes additius, comprensió, estratègies de comptatge, estratègies de càlcul mental

ABSTRACT

This research project studies and analyses the understanding and the strategies used by 2n grade students when solving addition and abstraction arithmetical problems.

In order to achieve this aim, the design and application of an individual test, consisting on solving problems, has been carried out. It has been taken before and after an educational intervention focussed on improving the difficulties found when students have to solve problems. Using the analysis results, it will be check if after working the problem solving process and stressing the strategies to solve addition problems, understanding improves. Also if the strategies appeared during the process are suitable for the arithmetic operation required.

Key words: problem solving process, addition problems, understanding, counting strategies, computation strategies

ÍNDEX

PRESENTACIÓ

La memòria que es presenta a continuació correspon al Treball de Final de Grau en Mestre d'Educació Primària de la Universitat de Vic. Aquest treball de recerca s'emmarca dins l'àrea de coneixement de Didàctica de les Matemàtiques i se centra en un procés matemàtic específic: la resolució de problemes. Concretament aquesta investigació estudia i analitza la comprensió i les estratègies utilitzades per alumnes de 2n de primària de l'Escola Quatre Vents (centre educatiu públic de Manlleu) a l'hora de resoldre problemes aritmètics de suma i resta.

Pel que fa al contingut del treball està dividit en sis parts clarament diferenciades. La primera part conté el plantejament de la investigació. En aquesta es presenta el propòsit de recerca, es justifica el treball i s'exposa la motivació personal de l'autora sobre la temàtica d'estudi. A més, es formalitza la hipòtesi d'investigació i es presenten els objectius de la recerca. Finalment es descriu breument el procés seguit per elaborar aquest treball.

La segona part consisteix en el marc teòric de la recerca. S'exposen diverses definicions del terme *problema*, s'estableixen algunes diferències entre un exercici i un problema, i s'elabora una classificació dels diferents tipus de problemes. També es tracta el paper de la resolució de problemes en l'ensenyament de les matemàtiques i en la competència matemàtica. Finalment, es presenten les fases que intervenen en el procés de resolució i les estratègies que utilitzen els infants a l'hora de resoldre problemes.

La tercera part explica la metodologia utilitzada per elaborar aquest treball d'investigació. Es realitza una descripció de l'orientació metodològica i del paradigma de la investigació, així com de la metodologia educativa concreta: la investigació acció. A continuació s'exposen els instruments utilitzats per recollir les dades durant la investigació i el procés seguit en la part pràctica.

La quarta part consisteix en l'anàlisi de les dades obtingudes. Es planteja quin procés d'anàlisi s'ha seguit en aquesta recerca i es recullen les dades obtingudes a partir de l'observació. També es presenten quins són els resultats d'aquestes proves, fent incís en els objectius inicials de la recerca: la comprensió i les estratègies emprades pels infants durant la resolució de problemes de suma i resta.

La cinquena part mostra les conclusions de l'estudi, mitjançant les quals es validen les hipòtesis d'investigació. També s'exposa la prospectiva de la recerca on ens plantegem noves línies d'estudi per aprofundir en la investigació. Finalment, la sisena part presenta les reflexions i les valoracions en relació als aprenentatges del Grau de Mestre d'Educació Primària i de la futura professió.

1. PLANTEJAMENT

En aquest capítol es realitza una introducció al problema de recerca descrivint el propòsit d'aquesta investigació. Primerament es justifica la recerca i s'exposa la motivació personal de l'autora sobre la temàtica d'estudi. A continuació es formalitza la pregunta d'investigació i els objectius de la recerca. I, finalment, es descriu breument el procediment que s'ha dut a terme per elaborar aquest informe.

1.1 Propòsit i justificació de la investigació

Després de presentar l'objecte d'estudi d'aquesta recerca, cal centrar l'atenció en el propòsit d'aquest treball. En aquest cas, el problema d'investigació consisteix en determinar de quina manera els alumnes de 2n de primària resolen problemes aritmètics de suma i resta i quines estratègies utilitzen en el procés de resolució.

Per justificar l'elecció de la temàtica de la recerca: la resolució de problemes, es fa necessari explicar diversos aspectes estrictament relacionats amb la motivació personal de l'autora. Per una banda, la tria de l'itinerari *Matemàtiques a l'Educació Primària* no és atzarosa. Aquesta elecció ja demostra una predisposició i un interès concrets per aprofundir en l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques.

Per altra banda, les experiències viscudes en les distintes estades de pràctiques al llarg del Grau en Mestre d'Educació Primària m'han fet adonar de la importància de la resolució de problemes en l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques, un procés fonamental. Aquestes observacions queden validades pel currículum d'Educació Primària (*decret 142/07*) en el qual s'assenyala que aquest procés específic hauria de convertir-se en el nucli de l'ensenyament matemàtic.

Per aquests motius, l'interès i les ganes per endinsar-me en la resolució de problemes va créixer. Concretament, estava interessada en observar com els infants aprenien a resoldre problemes. És per això que vaig decidir enfocar la recerca en l'anàlisi de la comprensió i de les estratègies que utilitzen els infants a l'hora de resoldre un problema.

1.2 Objectius i hipòtesis

Per tal de concretar el propòsit d'investigació es defineixen els següents objectius per guiar la recerca:

- Detectar les dificultats que tenen els infants a l'hora de resoldre problemes de suma i resta tan pel que fa a la comprensió com en l'elecció i ús de l'estratègia adequada.
- Identificar les estratègies que utilitzen els infants de 2n de primària per resoldre problemes aritmètics.
- Dissenyar i posar en pràctica una proposta didàctica centrada en l'ensenyament de la resolució de problemes i en l'ensenyament d'estratègies de càlcul mental per millorar les dificultats en relació a la comprensió i l'ús d'estratègies.
- Comprovar si la programació aplicada ha permès una evolució de la comprensió i de l'ús de les estratègies dels infants en la resolució de problemes additius.

Les hipòtesis d'investigació que es plantegen en aquesta recerca són:

- Si es treballa específicament el propi procés de resolució de problemes amb els alumnes millora la seva comprensió a l'hora de resoldre'ls.
- Si s'incideix directament en les dificultats detectades en l'ús de les estratègies per resoldre problemes additius, les estratègies aparegudes s'adeqüen al tipus d'operació aritmètica que es demana.

1.3 Procés seguit per elaborar el treball

D'entrada cal esmentar que l'estructura base d'aquest treball pivota sobre dos grans eixos: una fonamentació teòrica i un apartat d'aplicació. És important subratllar que abans de dur a terme una investigació cal una planificació, a més d'una recerca sobre les investigacions fetes sobre el tema.

Així doncs, en la part teòrica es revisa la literatura i s'elabora un marc en el qual es desenvolupen els conceptes principals i es relacionen amb aportacions de diversos autors de referència en el camp de recerca. Alguns d'ells s'han seleccionat a partir de la teoria i dels recursos en didàctica de les matemàtiques facilitats pel professorat del Departament de Didàctica de les Arts i les Ciències de la Universitat de Vic durant el Grau en Mestre d'Educació Primària, tan en les assignatures troncals: *Didàctica de les Matemàtiques I* i *II*; com sobretot en dues optatives de l'itinerari *Matemàtiques a l'Educació Primària*: *Desenvolupament professional i estratègies per al professorat de matemàtiques* i *Atenció a la Diversitat i Dificultats en l'Aprenentatge de les Matemàtiques*.

En la part pràctica es concreta l'orientació metodològica i el procés seguit a l'hora de recollir i d'analitzar les dades, a més d'incloure els resultats obtinguts. Cal assenyalar que aquesta part s'ha elaborat a partir de la informació recollida en el centre de *Pràctiques III*, l'escola Quatre Vents de Manlleu. És important afegir que aquestes dades venen condicionades per la intervenció educativa aplicada.

Finalment, a partir dels resultats obtinguts es redacten unes conclusions i s'anuncien algunes propostes de millora.

2. MARC TEÒRIC

En aquest capítol es presenta el marc teòric de la recerca que es divideix en dos grans apartats: la resolució de problemes i l'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes de matemàtiques. En el primer apartat s'exposen diverses definicions del terme *problema*, s'estableixen algunes diferències entre un exercici i un problema i s'elabora una classificació dels diferents tipus de problemes. El segon apartat es centra en el paper de la resolució de problemes en l'ensenyament de les matemàtiques. En aquest també es presenten les fases que intervenen en el procés de resolució i les estratègies que utilitzen els infants per resoldre problemes.

2.1 La resolució de problemes

En aquest apartat es defineix què és un problema de matemàtiques a partir de diverses definicions elaborades per autors de referència en aquest camp. A continuació s'anoten els aspectes essencials per poder distingir entre un exercici i un problema. I, finalment, s'elabora una classificació dels diferents tipus de problemes, s'esbossen algunes dificultats i es llisten els coneixements implicats en el procés de resolució.

2.1.1 Què és un *problema* de matemàtiques?

Definir què és un *problema* de matemàtiques no és una tasca senzilla. Al llarg dels anys molts autors han definit, des de la seva perspectiva, què es pot entendre per *problema.* Tal i com explica Schoenfeld (1992: 10) "els *problemes* i la *resolució de problemes* han tingut múltiples definicions, sovint contradictòries, al llarg dels anys, fet que dificulta la interpretació de la literatura".

El mateix Schoenfeld (1992) anota l'amplitud i la controvèrsia d'aquesta definició exposant dues accepcions per al terme *problema* extretes del diccionari Webster's (1979, citat a Schoenfeld, 1992: 10):

1. *“En matemàtiques, qualsevol cosa que requereix ser resolta o que et demani fer alguna cosa.”*
2. *“Una pregunta... que és desconcertant o difícil”.*

Aquesta mateixa dualitat es pot observar en la definició proposada pel Gran Diccionari de la Llengua Catalana (2007):

1. “En matemàtiques, tota qüestió en què partint d'unes dades conegudes cal arribar a uns resultats”.
2. “Qüestió, dificultat, a resoldre, a aclarir”.

Ambdós diccionaris subratllen explícitament la diferència entre la concepció generalista i la concepció específica, en l’àmbit de les matemàtiques, del terme *problema.* D’aquí en endavant treballarem a partir de la primera accepció centrada en les matemàtiques.

Als anys 60, Polya (1970: 117) va assenyalar que “tenir un *problema* significa buscar de manera conscient una acció apropiada per aconseguir un objectiu clarament concebut, però no assolible de manera immediata”. Poc després, Kantowski (1977, citat a Luceño, 1999: 13) descriu que un individu es troba davant d’un *problema* “cuando se enfrenta con una cuestión a la qua no puede dar respuesta o con una situación que no sabe resolver, utilizando los conocimientos inmediatos disponibles”. En aquesta mateixa línia, als anys 90 Hiebert et al. (1997, citat a Van de Walle, Karp i Bay-Williams, 2013: 34) defineix que “un *problema* és una tasca o una activitat en la qual els estudiants no tenen regles ni mètodes prescrits o memoritzats, ni tampoc existeix un mètode específic per arribar a la solució correcta. Per ampliar, exposem una cita de Canals:

> Un problema no és una pura activitat d’aplicació, sinó que és una situació nova, si pot ser real, i sempre propera, per a la qual no hem estat ensinistrats prèviament. El problema planteja un interrogant, ens fa imaginar, pensar, i trobar camins per arribar a una possible solució no necessàriament única. (Canals, 2012: 11)

A partir d’aquestes primeres definicions s’extreuen algunes característiques dels *problemes*, concretament de la naturalesa del seu procés. Així doncs, el procediment per resoldre un problema no és immediat, no és únic, no és mecànic i és desconegut. Lappan i Philips (1998, citats a Cai i Lester, 2010: 1) llisten una sèrie de criteris per definir què és un bon *problema*:

1. Ha de treballar un contingut matemàtic útil.
2. Requereix d'un nivell més alt d'abstracció i de la resolució de problemes.
3. Contribueix al desenvolupament conceptual.
4. Ofereix una oportunitat perquè el professor pugui avaluar els aprenentatges i les dificultats que estan experimentant els seus estudiants.
5. Es pot abordar de diferents maneres i utilitzant múltiples estratègies.
6. Té diverses solucions i permet diferents posicionaments.
7. Fomenta la participació.
8. Connecta amb altres idees matemàtiques.
9. Promou l'ús habitual de les matemàtiques.
10. Ofereix l'oportunitat de practicar habilitats importants.

Per descomptat, tots els problemes no poden satisfer els deu criteris establerts per Lappan i Philips però marquen la pauta a seguir. Tot i això, tal i com descriuen Cai i Lester (2010) la majoria d'investigadors estan d'acord en que els quatre primers criteris són essencials a l'hora de conceptualitzar un *problema*: que contingui matemàtiques útils, que requereixi d'un nivell més alt d'abstracció, que ajudi al desenvolupament de conceptes nous i que permeti als docents dur a terme una avaluació formativa, o dit d'altra manera, ajudi a observar els aprenentatges i les dificultats dels resolutors.

Un altre aspecte rellevant al definir què és un *problema* està vinculat al procés de transformació d'una situació concreta a una de nova. Segons Mayer i Wittrock (2006: 47) "un problema es produeix quan en una situació determinada, el resolutor ha de transformar la proposta inicial plantejada (objectiu concret) en una solució d'èxit (objectiu aconseguit) i no té coneixements sobre com dur a terme aquesta transformació". En la mateixa línea, Fernández Bravo (2010: 27) estableix que "un problema se considera como tal para un sujeto cualquiera cuando este sujeto es consciente de lo que hay que hacer, sin saber, en principio, cómo hacerlo. En este sentido, el sujeto reconoce un desafío novedoso al que hay que dar respuesta". Vila i Callejo també posen èmfasi en aquesta concepció al definir com a *problema*:

> Una situació, plantejada amb una finalitat educativa, que proposa una qüestió matemàtica el mètode de solució de la qual no és immediatament accessible a l'alumne/resolutor o grup d'alumnes que intenta resoldre-la, perquè no disposa d'un algoritme que relacioni les dades i la incògnita o d'un procés que identifiqui automàticament les dades amb la conclusió, i per tant haurà de buscar, investigar, establir relacions, etc. per afrontar una nova situació. (Vila i Callejo, 2004: 31).

Els autors citats reforcen la idea de desconeixença del mètode de resolució enfront l'objectiu proposat inicialment i també la inexistència d'un model únic i mecànic per arribar a la solució correcta. A més a més, tots ells atorguen un paper vital al resolutor al ser l'encarregat d'aquesta transformació. Per tant, cal que aquest tingui una voluntat intrínseca per resoldre el problema que té al davant. Luceño (1999: 13) reforça aquest rol motivacional del resolutor al exposar que un *problema* "ha de despertar la curiosidad del individuo, provocando cierta tensión durante la búsqueda del plan de resolución y, finalmente, hacerle sentir la alegría inherente al descubrimiento/hallazgo de la respuesta o solución". Seguint aquesta mateixa idea Puig i Cerdán (1988: 37) exposen que "siéndole presentado un problema al resolutor, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea".

En aquest treball es prendrà com a marc de referència la definició elaborada per Vila i Callejo (2004) ja que inclou aspectes que es consideren essencials com: la finalitat educativa dels problemes, la desconeixença immediata d'un mètode o d'una estratègia per resoldre el problema, el procés de transformació, inicialment desconegut, d'una situació inicial a una situació nova i la implicació activa del resolutor en el moment de buscar, d'investigar, d'establir relacions, etc. Cal posar èmfasi en el propòsit exprés i desitjat del resolutor per donar solució a aquell problema.

2.1.2 Algunes diferències entre un exercici i un *problema*

Si bé és important definir què és un problema també ho és establir les diferències entre exercici i problema. Per Luceño (1999: 13) un problema és una "situación en la que haya un planteamiento inicial y la exigencia que obliga a transformar-lo. La vía para pasar de la situación inicial a la nueva situación exigida, tiene que ser desconocida; cuando es conocida deja de ser un problema". Luceño (1999) engloba en la seva definició una idea important: què no és un problema. Cal posar especial atenció en aquest aspecte ja que sovint en matemàtiques s'utilitzen els termes exercici i tasca com a sinònims de *problemes* per interferència semàntica i això suposa una dificultat afegida a l'hora d'establir una bona definició.

Així doncs, abans de continuar serà necessari revisar la literatura i anotar les diferències entre problema i exercici. Polya (1970) distingeix entre els “problemes” i els “problemes rutinaris”, terme que podem considerar sinònim d’”exercici”. Aquest autor (1970, citat a Sellas, 2009: 24) defineix com a problemes rutinaris “todo problema que se puede resolver ya sea sustituyendo simplemente nuevos datos en lugar de los que un problema ya resuelto”.

En la mateixa línia, Kantowski (1981: 111) explica aquesta diferència assenyalant que un *problema* “es una situación que difiere de un ejercicio en que el resolutor de problemas no tiene un proceso algorítmico que lo conducirá con certeza a la solución”.

Stanic i Kilpatrick (1989, citats a Schoenfeld, 1992: 14) també assenyalen aquesta distinció conceptual al exposar que “els *problemes no rutinaris* es caracteritzen per requerir un alt nivell d’habilitat en la resolució de problemes, en canvi els *problemes de rutina* es poden posar en pràctica un cop els estudiants aprenen conceptes i habilitats matemàtiques bàsiques”. Segons Schoenfeld (1992: 11) “els exercicis rutinaris s’utilitzen per posar en practica una tècnica matemàtica concreta”. Per aquest motiu, l’autor defensa que tots els problemes rutinaris segueixen la mateixa estructura:

1. Un exercici per introduir una tècnica.
2. La tècnica és il·lustrada.
3. Són donades més tasques per tal que l’estudiant pugui practicar la capacitat il·lustrada.

Finalment, Van de Walle et al. (2013: 34) observen que “un problema de "rutina" és quan els estudiants poden dir immediatament si es tracta d'una multiplicació, divisió, suma o resta. El problema és de "no rutina" quan inicialment no saben com resoldre’l”. Per ajudar en aquesta distinció, Van de Walle et al. (2013: 35) també descriuen tres característiques que ajuden a determinar si aquella activitat és o no un problema. Segons els autors mencionats els problemes:

1. Han de partir dels coneixements dels estudiants.
2. L'aspecte problemàtic d’aquests ha d’ajudar als contingut matemàtic que els estudiants han d’aprendre.
3. Han d'exigir justificacions i explicacions o respostes i mètodes.

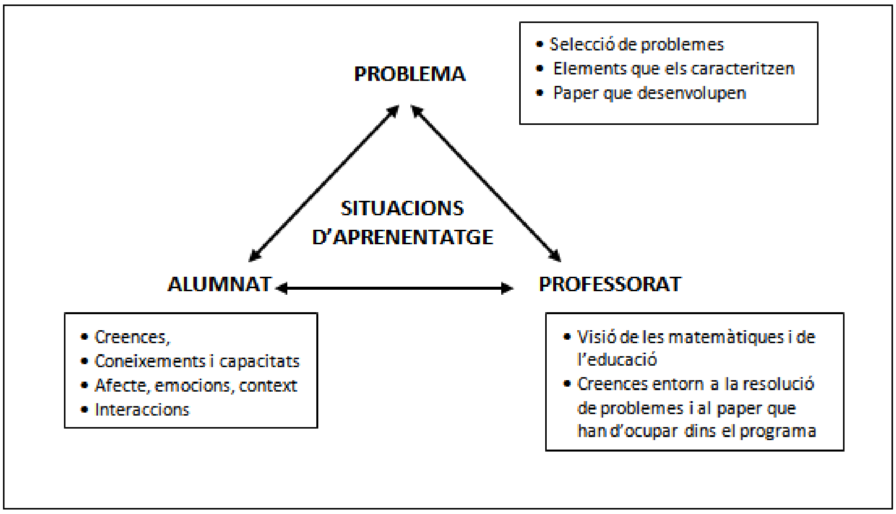
A partir de les definicions aportades pels autors es pot deduir que la naturalesa del procés en els exercicis serà contraria a la dels problemes i, per tant, serà coneguda, mecànica i immediata. Tots els autors citats consideren com a exercici o problema rutinari quan el resolutor coneix la manera d'arribar a la solució correcta en la primera lectura. Tal i com descriu Polya (1970, citat a Sellas 2009: 25) aquest tipus de problemes "pueden ser útiles en la enseñanza de las matemáticas pero sería imperdonable proponer a los alumnos exclusivamente problemas de este tipo".

Schoenfeld (1985) expressa una altra idea clau, la relació entre el resolutor i l'activitat en qüestió, sigui un exercici o un problema. Dit d'altra manera, Schoenfeld defensa que determinar si una tasca és o no un problema dependrà directament i estrictament del propi resolutor:

> Ser un problema no és una propietat inherent d'una tasca matemàtica. Més aviat és una relació entre l'individu i la tasca el que fa d'aquesta un problema per aquella persona. La paraula problema s'usa per designar una tasca que és difícil per a l'individu que està intentant resoldre-ho. Tanmateix, aquesta dificultat ha de ser un embolic intel·lectual més que de càlcul (...). Per tal d'enunciar-ho formalment, si hom té accés a un esquema de solució per a una tasca matemàtica, aquesta és un exercici i no pas un problema. (Schoenfeld, 1985: 74)

En la mateixa línia Rubinstrein (1966) exposa que només es podrà considerar que una activitat és un problema si el propi resolutor la veu com a problema, per tant, cada tasca dependrà en funció de la persona a qui va dirigida. La clau doncs resideix en la relació que s'estableix entre el resolutor i el problema, més significativa inclús que el propi problema.

Tot i això, no podem oblidar els tres elements bàsics que intervenen en qualsevol pràctica educativa: l'alumnat, és a dir, els seus coneixement, capacitats, creences, emocions, etc.; la tasca, acuradament seleccionada per assolir un objectiu determinat; i el professorat, amb la seva visió particular de les matemàtiques i de l'educació en general. Vila i Callejo (2004: 33) esquematitzen aquesta tríada d'elements que conformen l'ambient d'aprenentatge de la manera següent:



Adaptació pròpia de l'esquema elaborat per Vila i Callejo (2004).

2.1.3 Tipologia de problemes matemàtics

Després de definir què és un problema, ara indagarem en les diferents tipologies de problemes. Precisament, a l'hora de classificar els problemes matemàtics podem utilitzar diversos criteris per elaborar cada una de les tipologies en funció de la finalitat de l'estudi. Així doncs cada autor elabora la seva pròpia ordenació en funció d'uns ítems o d'uns altres. Algunes classificacions que en aquest treball no són pertinents podrien ser: la distinció que Polya (1970) estableix entre els "problemes per resoldre" i dels "problemes per demostrar"; la categorització de Butts (1980, citat a Puig i Cerdán, 1988) des del punt de vista creatiu: exercicis de reconeixement, exercici algorítmics, problemes d'aplicació, problemes de recerca i situacions problemàtiques; o la jerarquització en 4 apartats que sintetitza Perales (2010) segons: el camp de coneixement implicat (matemàtiques, física, química, etc.), la tasca requerida per la resolució (qualitatius, quantitatius i experimentals), el procediment seguit en la resolució (exercicis, algorítmics, heurístics o creatius) i el nombre de solucions (oberts o tancats).

A finals dels anys 80, Carpenter et al. (1988: 387) ja observaven que la majoria de "la investigació recent s'havia basat en una anàlisi dels tipus de problemes verbals en base de les seves característiques semàntiques". Això explica que un dels mètodes de categorització més freqüents en l'educació primària consisteixi en fixar-se en el tipus d'accions o de relacions descrites en els problemes, des d'un punt de vista semàntic global; i també que en aquest informe s'utilitzi aquest criteri de classificació. De totes maneres, cal assenyalar que altres aspectes com la mida dels nombres, el tema o el context treballat en el problema, poden anar variant, però l'important és que l'estructura bàsica subjacent sigui la mateixa.

Així doncs, pel què fa als problemes verbals de suma i resta, Carpenter et al. (1982) assenyalen quatre dimensions bàsiques en relació a les característiques semàntiques: la relació dinàmica o estàtica entre els conjunts implicats; la relació d'inclusió o de conjunt –subconjunt; la relació dinàmica si l'acció és resultat d'un augment o d'una disminució de la quantitat donada inicialment; i la naturalesa de la incògnita. A partir d'aquestes quatre dimensions Carpenter et al. (1999) distingeixen quatre categories bàsiques: de canvi –augment o disminució– ; de combinació (esquema parts-total); de comparació; i d'igualació –més que o menys que –; que detallaré a continuació.

En primer lloc, els problemes de canvi –augment o disminució– es caracteritzen per una acció directa o implícita a través de la qual s'afegeixen o s'extreuen elements a un conjunt donat. Tal i com descriuen Puig i Cerdán (1988: 99) "en estos problemas se pueden distinguir tres momentos diferentes en los que se describe cómo una cantidad inicial es sometida a una acción, discreta o sobreentendida, que la modifica. Las tres cantidades iniciales en el problema reciben los nombres de cantidad inicial, final y de cambio o diferencia entre la inicial y la final". Puig i Cerdán afegeixen que a partir de les relacions que s'estableixen entre les dades (quantitat inicial i final) i la incògnita es generen sis tipus de problemes de canvi. Aquests es recullen en el quadre següent:

Tipus de problema	**Incògnita**		
	Resultat desconegut	Canvi desconegut	Inici desconegut
Canvi – augment	La Carla té 47 cromos. En Sean n'hi dóna 23 més. Quants cromos té ara la Carla? **(47+23= ?)**	La Carla té 47 cromos. En Sean n'hi dóna uns quants més. Si ara la Carla té 70 cromos. Quants n'hi ha donat en Sean? **(47+?= 70)**	La Carla té uns quants cromos i en Sean n'hi ha donat 23. Ara la Carla en té 70. Quants cromos tenia la Carla al començament? **(?+23= 70)**
Canvi – disminució	La Carla té 70 cromos. N'ha donat 23 a en Sean. Quants cromos li queden a la Carla? **(70-23= ?)**	La Carla té 70 cromos. En dóna alguns a en Sean. Ara a la Carla li queden 47 cromos. Quants cromos ha donat la Carla a en Sean? **(70-?= 47)**	La Carla té uns quants cromos. N'ha donat 23 a en Sean. Ara li queden 70 cromos. Quants cromos tenia la Carla al començament? **(?-23= 70)**

En segon lloc, en relació als problemes de combinació (esquema parts-total) cal esmentar que no es produeix cap acció directa o implícita. Aquests es caracteritzen per la relació que s'estableix entre un conjunt i els seus dos subconjunts. Puig i Cerdán (1988: 101) exposen que "la pregunta del problema puede versar acerca del todo o acerca de una de las partes, con lo que hay dos tipos posibles de problemas de combinar". O bé es donen dues parts i es demana de calcular el total o es dóna una part i el total i es demana de calcular la part restant. Això és així ja que les parts del problema són intercanviables i equivalents al no afegir un conjunt dins de l'altre. Aquestes es presenten tot seguit:

Tipus de problema	**Incògnita**	
	Total desconegut	Una part desconeguda
Combinació (Esquema parts-total)	La Carla té 47 cromos i en Sean en té 23. Quants cromos tenen entre tots dos? **(47+23= ?)** La Carla té 47 cromos de flors i 23 cromos de plantes. Quants cromos té la Carla? **(47+23= ?)**	La Carla i en Sean tenen 70 cromos entre tots dos. Si la Carla en té 47, quants en té en Sean? **(70-47= ?)** La Carla té 70 cromos, 47 són de flors i la resta de plantes. Quants cromos de plantes té la Carla? **(70-47= ?)**

En tercer lloc, en els problemes de comparació tampoc es produeix cap acció directa o implícita sinó que en aquests es descriu una relació entre quantitats. En paraules de Puig i Cerdán (1988: 102) "se incluyen en esta categoría los problemas que presentan una relación estática de comparación entre dos cantidades". Aquests problemes comparteixen amb els de combinació el seu caràcter estàtic però mentre que en aquests la relació és entre conjunts, en els de comparació és entre quantitats. Puig i Cerdán (1988: 102) denominaran cada una de les quantitats de la manera següent: "quantitat de referència, quantitat comparada i diferència". En funció del lloc on situem la incògnita sorgeixen 3 tipus de problemes:

Tipus de problema	**Incògnita**		
	Quantitat de referència (*Diferència desconeguda*)	Quantitat Comparada (*Quantitat amb la que es compara desconeguda)*	Diferència *(Referent desconegut)*
Comparació	La Carla té 70 cromos. En Sean en té 23. Quants cromos té la Carla més que en Sean?	En Sean té 23 cromos. La Carla té 47 més que en Sean. Quants cromos té la Carla?	La Carla té 70 cromos. Ella en té 47 més que en Sean. Quants cromos té en Sean?

En la classificació elaborada per Carpenter et al. (1999) no es té en compte el sentit de comparació, és a dir, si la quantitat comparada és "més que" o "menys que" la quantitat de referència. En canvi, Puig i Cerdán (1988: 102) sí que ho tenen en compte al argumentar que "el sentido numérico de la comparación puede establecerse en más o en menos, y dado que se puede preguntar por cualquiera de las tres cantidades, el número de tipos posibles de problemas de comparación es seis". Per tant, els tres tipus presentats en el quadre anterior responen a la relació comparativa "més que" però manquen els tres que s'inclouen dins la relació "menys que". Tots ells es recullen en la graella següent:

Tipus de problema	**Incògnita**		
	Quantitat de referència (*Diferència desconeguda*)	Quantitat Comparada (*Quantitat amb la que es compara desconeguda)*	Diferència *(Referent desconegut)*
Comparació **"més que"**	La Carla té 70 cromos. En Sean en té 23. Quants cromos té la Carla més que en Sean?	En Sean té 23 cromos. La Carla en té 47 més que en Sean. Quants cromos té la Carla?	La Carla té 70 cromos. Ella en té 47 més que en Sean. Quants cromos té en Sean?
Comparació **"menys que"**	La Carla té 47 cromos. En Sean en té 70. Quants cromos té la Carla menys que en Sean?	En Sean té 70 cromos. La Carla té 23 menys que en Sean. Quants cromos té la Carla?	La Carla té 47 cromos. Ella en té 23 menys que en Sean. Quants cromos té en Sean?

Les tres categories anteriors són les conegudes com a bàsiques per molts autors. Tot i això, tal i com s'ha esmentat anteriorment, als anys 80 Carpenter i Moser (1983, citats a Puig i Cerdán, 1988) ja distingeixen una quarta categoria bàsica: els problemes d'igualació. Puig i Cerdán (1988: 103) observen que aquesta tipologia "se caracteriza porque hay en ellos una comparación entre las cantidades que aparecen, establecida por un medio del comparativo de igualdad *tantos como*". Els problemes d'igualació comparteixen l'estructura bàsica amb els problemes de comparació i també la tipologia de les quantitats: de referència, comparada i diferència. En aquesta categoria també es poden construir sis tipus més de problema depenen de la relació que s'estableixi entre la quantitat de referència i la quantitat comparada. Ja que el sentit del canvi pot ser "més que" o "menys que", tal i com es pot veure a continuació:

Tipus de problema	Incògnita		
	Quantitat de referència (*Diferència desconeguda*)	Quantitat Comparada (*Quantitat amb la que es compara desconeguda*)	Diferència *(Referent desconegut)*
Igualació **"més que"**	La Carla té 70 cromos i en Sean en té 23. Quants cromos ha de comprar en Sean per tenir els mateixos que la Carla?[1]	La Carla té 47 cromos i en Sean en té uns quants. Si en Sean n'agafa 23 més tindrà els mateixos que la Carla. Quants cromos té en Sean?	La Carla té 47 cromos. Si en compra 23 més tindrà els mateixos que en Sean. Quants cromos té en Sean?
Igualació **"menys que"**	La Carla té 47 cromos i en Sean en té 70. Quants cromos ha de regalar en Sean si vol tenir els mateixos que la Carla?	La Carla té 47 cromos i en Sean en té uns quants. Si en Sean en regala 23 tindrà els mateixos que la Carla. Quants cromos té en Sean?	La Carla té 47 cromos. Si en regala 23 tindrà els mateixos que en Sean. Quants cromos té en Sean?

A mode de resum, aquesta classificació recull vint models de problemes de suma i resta i queden repartits en set tipus: canvi –augment o disminució; combinació (esquema parts-total), comparació – més que o menys que-; i igualació –més que o menys que-. Es pot deduir doncs que tots ells s'emmarquen dins d'una de les quatre categories bàsiques esmentades: canvi, combinació, comparació i igualació.

Caldria tractar encara una última classe de problemes verbals de suma i resta: els problemes oberts. Aquesta categoria no s'inclou en la classificació anterior on tots els problemes són tancats i admeten una sola resposta com a solució, és a dir, inclouen una única incògnita. En canvi, els problemes oberts tenen com a objectiu "satisfer les necessitats dels diversos alumnes", tal i com exposa Small (2012: 6). Aquests es caracteritzen per contenir una doble incògnita i per oferir al resolutor "múltiples respostes o enfocaments" (Small, 2012: 6). Segons Perales (2000: 19) aquesta distinció recau en el format de la resposta: "se suele hablar de problemas cerrados cuando la solución es unívoca, esta es única y además no admite dudas en cuanto a su validez. En el otro extremo tendríamos los llamados problemas abiertos que son aquellos que admiten varias soluciones".

Per exemplificar aquesta classe de problemes només em centraré en la categoria de canvi – augment o disminució-. Tanmateix cal tenir en compte que podríem aplicar el mateix procés de transformació en les altres categories bàsiques: combinació, comparació i igualació.

[1] S'utilitzarà l'expressió anàloga "els mateixos que" en comptes de "tants com" (Puig i Cerdán, 1988) per facilitar la comprensió dels alumnes. S'ha dut a terme aquest canvi tenint en compte el coneixement lingüístic del grup d'infants amb els quals vaig aplicar la intervenció didàctica.

Si ens centrem en la categoria de canvi, d'aquesta se'n desprenen dos tipus de problema obert en funció de la posició de les incògnites i, per tant, un total de 4 models que es recullen a continuació:

Tipus de problema	Incògnita	
	Una part desconeguda i el total desconegut	Dues parts desconegudes
Problema obert: Canvi - augment	La Carla té 47 cromos i en Sean n'hi dóna uns quants. Quants cromos li ha donat en Sean? / Quants cromos té ara la Carla? **(47 + ?= ?)**	La Carla tenia uns quants cromos i en Sean n'hi ha donat uns quants més. Si la Carla ara té 70 cromos. Quants n'hi ha donat en Sean? / Quants cromos tenia la Carla al començament? **(? + ?= 70)**
Problema obert: Canvi - disminució	La Carla té 47 cromos i en dóna uns quants a en Sean. Quants cromos té en Sean? / Quants cromos té ara la Carla? **(47 - ?= ?)**	La Carla tenia uns quants cromos i n'ha donat uns quants a en Sean. Si la Carla ara té 70 cromos. Quants n'ha donat a en Sean? / Quants cromos tenia la Carla al començament? **(? - ?= 70)**

Tots els problemes descrits s'engloben dins el que Puig i Cerdán entenen com a problemes d'una etapa, ja que només és necessària una operació aritmètica per resoldre'ls. Per aquests autors (1988: 90) a l'hora de categoritzar els problemes és essencial distingir entre "problemas de una etapa y problemas de más de una etapa, dependiendo de que sea necesario para alcanzar la solución, realizar una o más operaciones aritméticas".

Un altre dels aspectes a destacar és el grau de dificultat que varia significativament entre els problemes presentats. Aquesta dificultat va augmentant en paral·lel segons l'ordre de les categories descrites. És a dir, els de menor dificultat són els de canvi i els de major dificultat són els d'igualació. Puig i Cerdán (1988: 112) afirmen que "el orden de dificultad en general es de cambio, combinación y comparación".

Cal afegir que el grau de dificultat també varia segons la incògnita. Per exemple, en la categoria de canvi – augment o disminució–, els problemes són més fàcils de resoldre quan el resultat és desconegut. La dificultat augmenta quan el canvi és desconegut, i els més difícils són aquells en els quals l'inici és desconegut. Carpenter i Moser (1983, citats a Puig i Cerdán, 1988: 108) llisten una sèrie de dificultats en funció de la posició de la quantitat desconeguda, també anomenada com a proposició oberta subjacent en l'enunciat del problema. A continuació n'exposo algunes:

- Las proposiciones canónicas de adición y substracción (a+b= ?, a-b= ?) son menos difíciles que las no canónicas. (a+?= c, a-?= c)
- Las proposiciones canónicas de substracción (a-b= ?) son generalmente más difíciles que las proposiciones canónicas de adición. (a+b= ?)
- La proposición de minuendo desconocido (?-b= c) es significativamente más difícil que las otras cinco proposiciones de substracción.

La manera de redactar i les situacions descrites en el problema també poden incrementar la dificultat. A tall d'exemple, els problemes seran més senzills si l'ordre de les frases en l'enunciat es correspon amb l'ordre de passos que cal seguir per resoldre aquell problema.

Les dificultats presentades fins ara són causades per factors contextuals externs a l'alumnat, definits pel propi problema; la manera de plantejar i desenvolupar les activitats; i l'actuació del professorat. Cal tenir en compte que també existeixen els factors cognitius, és a dir, aquelles habilitats internes en l'alumnat que Mayer i Wittrock (2006) divideixen en coneixements específics i processos cognitius. Aquests mateixos autors observen que en la resolució de problemes hi ha quatre coneixements implicats:

1. Coneixement dels fets (*factual knowledge*): tot allò que s'aplica a una situació problemàtica particular.
2. Coneixement esquemàtic (*conceptual or semantic knowledge*): representació mental de l'estructura semàntica del problema. Indica quins són els termes en una equació signifiquen o com relacionar els termes de la fórmula a la descripció del problema.
3. Coneixement operatiu (*procedural knowledge*): procediment necessari per resoldre el problema. Implica el coneixement dels mètodes generals.
4. Coneixement estratègic (*strategic knowledge*): elaboració i planificació d'una sèrie d'accions per la resolució d'un tipus de problema. Alguns investigadors denominen a aquest coneixement amb el terme "heurística[2]".

[2] La definició del terme *heurística* proposada pel DIEC: "relatiu o pertanyent a un mètode exploratori de plantejament i de resolució de problemes en què es descobreix la solució per mitjà de l'avaluació dels progressos fets". Polya (1970: 101) entén per heurística moderna "el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones típicamente útiles en el proceso".

En la mateixa línia Callís (citat a Canals, 2010: 12) assenyala cinc nivells de comprensió i de maduresa dels infants que intervenen en el desenvolupament dels problemes:

1. Nivell lingüístic: aspectes morfosintàctics, semàntics, de contextualització...
2. Nivell lògic: referents a l'estructura lògica de la situació: comprensió de les parts, de l'ordre de les seqüències, de la possible subordinació entre elles...
3. Nivell matemàtic: la lògica de l'equivalència i dels canvis o operacions, que poder ser lògiques, aritmètiques o geomètriques.
4. Nivell operatiu: tria de mitjans adequats siguin models, símbols, algorismes, tècniques...
5. Nivell personal: imaginació, intuïció, memòria, estimació, capacitat d'arriscar-se...

Aquests autors assenyalen el conjunt de coneixements implicats en el procés de resolució que caldrà tenir en compte a l'hora d'analitzar com els infants resolen els problemes.

2.2 L'ensenyament – aprenentatge de la resolució de problemes de matemàtiques

En aquest apartat es tracta el paper de la resolució de problemes en l'ensenyament de les matemàtiques i en la competència matemàtica. En concret, s'emfatitza en l'ensenyament del procés de resolució de problemes i s'exposen les fases que intervenen en aquest procés. Per últim, es presenten les diverses estratègies que utilitzen els infants a l'hora de resoldre problemes.

2.2.1 El paper de la resolució de problemes en l'ensenyament de les matemàtiques i en la competència matemàtica

Els *Principles and Standards* del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM's) conceptualitzen la resolució de problemes com:

> Una part integral en tot ensenyament matemàtic i que per tant no es pot tractar de manera aïllada dins del programa escolar. La resolució de problemes en educació matemàtica ha d'incloure els 5 blocs de contingut (nombres i operacions, mesura, geometria, estadística i probabilitat). Els bons problemes ha d'integrar múltiples temàtiques i ser significatius pels resolutors. (NCTM, 2000: 52)

Si consultem el Currículum d'Educació Primària (2007: 127), en aquest s'exposa que per "assolir la competència matemàtica implica, entre altres, plantejar-se i resoldre problemes". Tanmateix es presenta la resolució de problemes "com a nucli del treball de matemàtiques, ja que facilita la construcció de nous coneixements, la transferència de conceptes, el desenvolupament d'estratègies de resolució i l'anàlisi del procés de resolució".

En aquests documents curriculars s'evidencia la importància de la resolució de problemes pel desenvolupament de la competència matemàtica. Aquesta idea queda reforçada per Van de Walle et al. (2013: 32) al afirmar que "la resolució de problemes és un mitjà potent i efectiu per aprendre". Així mateix, cal tenir en compte que a través d'aquest procés matemàtic específic es potencien altres procediments com el reconeixement, la identificació, la planificació, l'organització, l'aproximació, l'estimació, l'exploració i l'elaboració.

Luceño (1999) també s'inscriu dins d'aquest ideal integrador al entendre la resolució de problemes com a nucli de treball de les matemàtiques. Segons l'autor aquest procés que ha de ser present en tot ensenyament i aprenentatge de matemàtiques i a més ha de proporcionar un context favorable a través del qual en puguin aprendre conceptes, procediments i actituds.

En la mateixa línia, Puig i Cerdán (1988: 37) defensen que "la resolución de problemas de matemáticas es una tarea privilegiada para desarrollar métodos y estrategias útiles a la hora de abordar cualquier problema".

Tots aquests autors comparteixen el mateix tipus d'enfocament en relació a la resolució de problemes. En concret, es situen dins "l'ensenyament a través de la resolució de problemes" (*teaching throught problem solving*). Segons Van de Walle et al. (2013: 34) "a través de la resolució de problemes és més significatiu ensenyar els conceptes i els procediments matemàtics". Els mateixos autors (2013: 32) afirmen que aquest enfocament permet "als estudiants aprendre matemàtiques a través de contextos reals, problemes, situacions i models". Per tant, dit d'altra manera, permet als infants a aprendre els conceptes matemàtics amb significat i els ajuda en la comprensió dels conceptes més abstractes.

La definició del terme resolució de problemes proposada per Cai i Lester va en aquesta línia:

> El terme *resolució de problemes* es refereix a les tasques matemàtiques que tenen el potencial de proporcionar desafiaments intel·lectuals per millorar la comprensió i el desenvolupament matemàtic dels estudiants. Aquestes tasques -és a dir, els problemes- poden promoure la comprensió conceptual dels estudiants, fomentar la seva capacitat de raonar i comunicar matemàticament, i captar el seu interès i la seva curiositat. (Cai i Lester, 2010: 1)

Per aquest motiu, en paraules de Canals (2010: 11) "l'aprenentatge de la resolució de problemes no s'adquireix com a fruit de la repetició d'una mecànica conductista sinó que s'aprèn per la manipulació, l'anàlisi, la descoberta i la interacció amb els companys".

Retornant als tipus d'ensenyament relacionats amb la resolució de problemes, Schoeder i Lester (1989, citats a Van de Walle et al., 2013) en distingeixen dos més, a part de l'esmentat anteriorment: "l'ensenyament per a la resolució de problemes" (*teaching for problem solving*) i "l'ensenyament de la resolució de problemes" (*teaching about problem solving).*

Per Van de Walle et al. (2013) l'ensenyament per a la resolució de problemes es basa en ensenyar una habilitat als estudiants perquè més endavant la puguin utilitzar a l'hora de resoldre problemes. Per tant, aquest tipus d'enfocament segons l'autor (2013: 32) "sovint comença amb l'aprenentatge del concepte abstracte i després es trasllada a la solució de problemes com una forma d'aplicar les habilitats apreses".

Pel que fa a l'ensenyament de la resolució de problemes, aquest implica ensenyar als estudiants la manera sobre com resoldre un problema. Per aquest motiu Van de Walle et al. (2013: 32) exposen que aquest enfocament inclou "l'ensenyament del procés (entendre el problema, dissenyar una estratègia, implementar-la i comprovar-la) i de les estratègies per a la resolució d'un problema". Per Luceño (1999: 16) mitjançant aquest enfocament "los alumnos adquirirán estrategias especificas para resolver problemas, ciertas técnicas para ser buenos resolutores, favoreciendo la reflexión y discusión sobre el propio proceso o fases de resolución de problemas".

Aquest treball prendrà com a marc de referència dos enfocaments. Per una banda, l'ensenyament de la resolució de problemes, al estar d'acord amb la idea que cal incloure aquest contingut com a propi. I, per altra banda, l'ensenyament per a la resolució de problemes, en el sentit que cal treballar diferents tècniques per més endavant poder-les aplicar. Així doncs, s'entén com a necessari un temps específic per ensenyar als estudiants el procés i les estratègies per resoldre problemes.

Per últim, cal tenir en compte que la resolució de problemes no sempre ha ocupat un lloc central en la construcció del coneixement matemàtic tal i com recullen els plans d'estudis actuals. Durant molts anys aquest procés específic s'ha deixat de banda, com descriuen Stanic i Kilpatrick (1989, citats a Schoenfeld, 1992: 9): "des de l'antiguitat, els problemes han ocupat un lloc central en el currículum escolar de matemàtiques però la resolució de problemes no. La idea sobre la importància de desenvolupar la capacitat per resoldre problemes ha estat acceptada recentment pels educadors matemàtics".

2.2.2 Ensenyar a resoldre problemes

A finals del segle XIX, Dewey formula el que es considera el primer model de resolució de problemes. Des d'aleshores i fins l'actualitat diversos autors han elaborat altres models tal i com exposen Blanco (1996) i Vila i Callejo (2004), respectivament.

Així doncs, data de 1888 el model elaborat per Dewey basat en sis fases: la identificació de la situació problemàtica; la definició precisa del problema; l'anàlisi dels mitjans i de les finalitats (pla de solució); l'execució del pla; l'assumpció de les conseqüències; i l'avaluació de la solució (supervisió i generalització). A principis dels 90, Wallas estableix quatre fases per a la resolució de problemes: la preparació, recull d'informació i intents preliminars de solució; la incubació, aparcar el problema per realitzar altres activitats o descansar; la il·luminació, és el moment en què apareix la idea clau per a la solució; i la verificació, quan es comprova la solució.

No va ser fins l'any 1945 quan el matemàtic Georges Polya va publicà el llibre *How to solve it*, en el qual va establir quatre passos per a la resolució de problemes. L'objectiu de Polya era el de formar "resolutors ideals", és a dir, bons estudiants en la resolució de problemes capaços avançar linealment des de l'enunciat fins a la solució. A través d'aquest programa i amb l'ajuda d'un tutor, els estudiants havien d'assimilar unes tècniques de resolució efectives i alhora millorar el seu raonament matemàtic. Van de Walle et al. (2013: 33) reforcen aquest objectiu essencial al exposar que "l'ensenyament explícit d'aquests quatre passos ajuda als estudiants a millorar la seva capacitat de pensar matemàticament".

Aquests passos són els següents: la comprensió del problema, la concepció d'un pla, l'execució del pla i l'examen de la solució obtinguda (visió retrospectiva). Cal tenir en compte que aquestes fases no són apreses de manera autònoma sinó que precisen d'un treball directe i específic. Polya considera que els alumnes aprenen per imitació i per pràctica, per tant, per formar bons estudiants és necessari combinar l'orientació per part del tutor i l'ús personal d'estratègies heurístiques. Segons l'autor (1970: 4) "per aprendre a resoldre problemes cal observar i imitar el que fan els altres".

Aquest model per a la resolució de problemes, sorgit als anys 50, continua tenint gran acceptació i vigència en l'actualitat. Prova d'això és que les quatre fases dissenyades per Polya (1970) continuen apareixent en els llibres de text, així com en la majoria de les recerques a l'entorn d'aquesta temàtica.

Un altre autor de referència és Schoenfeld. Quaranta anys després aquest matemàtic va elaborar un model per al procés de resolució no lineal. A diferència de Polya, l'objectiu de Schoenfeld (1985) no era el de formar "resolutors ideals" sinó el d'ajudar als alumnes a millorar en el procés de resolució a partir de les tècniques i de les estratègies apreses. Així doncs, aquest autor té molt en compte al resolutor i la manera com aquest s'enfronta al problema en qüestió. Per assolir el seu objectiu Schoenfeld també divideix aquest procés en quatre fases: l'anàlisi i el disseny, l'exploració, l'execució i la comprovació de la solució obtinguda.

Per acabar, és interessant fer referència a la classificació que elaboren Vila i Callejo (2004) dels models anteriors en tres fases: l'abordatge o la preparació, on s'inclouen aquelles accions encaminades a comprendre millor el problema i a buscar diferents vies de resolució; el desenvolupament, mitjançant el qual es busca implementar l'estratègia de resolució que s'ha escollit en la fase anterior; i la revisió global, és a dir, aquelles decisions encarades a verificar, comprovar, reflexionar i generalitzar.

En aquest estudi ens centrarem en el model de Polya i, per aquest motiu, creiem necessari aprofundir una mica més en cada una de les fases:

1. **Comprensió del problema.** En aquesta primera fase cal esbrinar amb claredat què demana el problema. El resolutor ha d'estar compromès a esbrinar quin és el problema i a identificar quin repte per resoldre té al davant. Per Polya (1970: 5) la comprensió i la interpretació de l'enunciat és fonamental, ja que "és absurd respondre a una pregunta que no entens". L'autor també proposa algunes pautes per comprovar si la comprensió de l'enunciat s'ha fet correctament. Per exemple, demanar als resolutors que expliquin el problema amb les seves paraules o que n'assenyalin les parts principals.

   En aquesta fase serà vital repetir l'enunciat, separar-ne les parts, determinar quina és la incògnita, quines són les dades i les condicions que s'han de satisfer. A més, caldrà que el resolutor es plantegi si les condicions són: suficients, insuficients, redundants o contradictòries; per determinar la incògnita. Finalment, pot ser útil fer un dibuix, dit d'altra manera simbolitzar el problema de forma adequada.

Algunes preguntes a formular en aquesta fase podrien ser les següents: Entens el que se't demana?, Comprens el que diu l'enunciat?, Pots replantejar el problema amb les teves paraules?, Pots fer-ne un dibuix? (simbolitzar-lo de manera adient), Quina és la incògnita?, Quines són les dades?, Quines són les condicions?, Són suficients per determinar la incògnita?, etc.

2. **Concepció d'un pla**. Polya (1970: 8) entén per pla "quan el resolutor sap o coneix, almenys en línies generals, els càlculs, els còmputs o les construccions que cal dur a terme per resoldre el desconegut". Per tant, en aquesta fase caldrà determinar com resoldre el problema. Segons l'autor (1970: 12) "idear un pla i arribar a la solució no és fàcil. Arribar a l'èxit requereix esforç, concentració i bons hàbits mentals. També tenir els coneixements involucrats en el problema i una mica de sort". Per tant, elaborar un bon pla serà vital per arribar a la solució, en paraules de Polya (1970: 8) "el principal èxit en la solució del problema és concebre la idea d'un pla".

   En el moment de dissenyar un pla el resolutor ha de pensar si coneix algun càlcul, estratègia o teorema que li pugui ser útil en la resolució. També pot considerar les semblances o les diferencies entre aquell problema i un d'anterior, és a dir, buscar ajuda en problemes auxiliars o subproblemes. Si la solució no es troba de manera immediata es poden tenir en compte problemes anàlegs més senzills per més endavant elaborar una generalització de la solució. Tanmateix cal estar segur d'haver utilitzat totes les dades de l'enunciat i d'haver tingut en compte tots els coneixements que fan referència al problema.

   Algunes preguntes que poden ajudar en aquesta fase són: Quins càlculs es poden realitzar?, Quins raonaments o estratègies són útils?, Coneixes algun problema que pugui estar relacionat?, Coneixes algun problema amb la mateixa incògnita?, Has intentat resoldre algun problema semblant o més senzill?, Has utilitzat totes les condicions?, Has tingut en compte tots els coneixements que fan referència al problema?, etc.

3. **Execució d'un pla**. En aquesta fase s'implementa el càlcul o l'estratègia escollida. Posar en pràctica el pla per Polya (1970) és una tasca que no hauria de portar complicacions si el resolutor ha fet una bona elecció. Tot i això, serà necessari comprovar que cadascun dels passos que s'apliquen per trobar la solució són correctes i, si cal, demostrar-ho i justificar-ho.

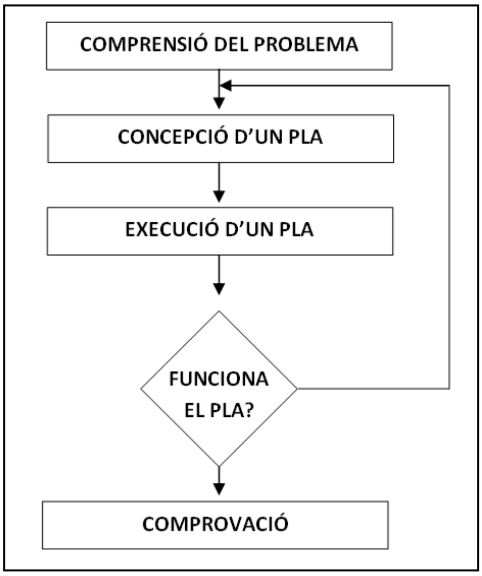
En aquesta tercera fase també es proposen algunes qüestions: Has comprovat cada un dels passos?, Estàs segur que aquest pas és el correcte?, Pots demostrar que aquest pas és correcte?, Sabries justificar perquè aquest pas és l'adient?, etc.

4. **Visió retrospectiva**. Aquesta última fase d'examen de la solució obtinguda és molt important. Per Van de Walle et al. (2013: 33) "aquesta fase és sense dubte la més important perquè és el moment de determinar si la resposta elaborada en el pas 3 (l'execució d'un pla) respon al problema tal com s'entén originalment en el pas 1 (comprensió del problema)". Segons Luceño (1999: 18) aquesta "consiste en el análisis de la solución obtenida a los efectos de comprobar si se adapta a la solución exigida".

   Polya (1970: 14-15) defensa que "un cop obtenim la solució el procés de mirar cap enrere, de reconsiderar i de reexaminar el resultat i dels passos fets, ajuda als resolutors a consolidar els seus coneixements i a millorar significativament la seva capacitat per resoldre problemes". Per aquests motius, en aquest punt serà necessari verificar la solució i el raonament utilitzat, així com pensar si es pot obtenir el resultat d'alguna altra manera. També, si la mateixa tècnica de resolució es pot aplicar en un altre problema.

   Algunes preguntes que es poden plantejar als resolutors són: Pots verificar la solució obtinguda?, Pots verificar el raonament utilitzat?, Pots obtenir el resultat de diferent forma?, Existeix una altra solució?, Pots utilitzar el resultat o el mètode desenvolupat en algun altre problema?, Pots fer un resum del procés seguit?, etc.

En el gràfic següent es resumeixen les fases de resolució de problemes segons el model descrit per Polya que recull Luceño (1999: 18):



Esquema elaborat per Luceño (1999).

Segons descriu el mateix Polya (1970) es pot tenir una idea brillant obviant tot el treball preparatiu i sense que la solució en surti afeblida. Si això succeeix no és un problema sinó al contrari. Per l'autor, el pitjor que pot passar és que un alumne no atini amb la idea brillant i comenci a fer càlculs sense haver entès el problema. Això fa pensar que les quatre fases descrites són una bona guia però no són úniques i inamovibles. També es pot deduir que no cal seguir-les seqüencialment.

Cal afegir que en cada una d'aquestes fases el resolutor pot experimentar dificultats bé lligades als conceptes, a les estratègies o a les habilitats que cal desenvolupar. Luceño (1999) llista aquestes dificultats de la manera següent:

- En la fase 1: **Comprendre el problema**. L'enunciat és confús. Falta de comprensió lectora en general. Termes desconeguts en l'enunciat. El context del problema no és familiar. No es detecten dades donades de forma indirecta, que es dedueixen de l'enunciat. No es distingeix bé la pregunta o les preguntes del problema. No es distingeixes les dades conegudes.

- En la fase 2: **Concepció d'un pla**. Falta d'estratègies heurístiques. Falta de coneixements matemàtics exigits pel problema. Falta d'interès. Falta de domini en el càlcul. Falta de perspectiva.

- En la fase 3: **Execució del pla**. Aplicar irreflexivament algorismes o determinats procediments. No analitzar el resultat. Apatia davant el resultat obtingut. Manca d'esperit crític. No anticipa de forma estimada els resultats.

- En la fase 4: **Visió retrospectiva**. Dificultats de verbalització dels processos seguits. Manca de llenguatge matemàtic apropiat. No tenir interès per conèixer altres estratègies, resultats, etc. Falta d'ordre i de claredat en les anotacions i els càlculs realitzats.

2.2.3 Estratègies per resoldre problemes aritmètics

Després de descriure les quatre fases per resoldre problemes, ara aprofundirem en les estratègies que utilitzen els infants en els problemes aritmètics. Tot i això, abans d'endinsar-nos en les estratègies emprades pels nens i nenes, cal distingir entre els tres tipus de coneixement matemàtic que indica Baroody (1988): l'intuïtiu, l'informal i el formal.

En primer lloc, l'autor entén per coneixement intuïtiu aquell que l'infant desenvolupa des del seu naixement i que està basat en l'experiència, la intuïció i la percepció directa. No obstant això, Baroody (1988: 45) exposa que "el conocimiento intuitivo, simple y llanamente, no es suficiente para abordar tareas cuantitativas. Por tanto, (los niños) se apoyan cada vez más en instrumentos más precisos y fiables: numerar y contar". Parlem, doncs, del coneixement informal. En paraules de Baroody (1988: 45) "contar ofrece a los niños el vínculo entre la percepción directa concreta, si bien limitada, y las ideas matemáticas abstractas, pero generales. Contar coloca el numero abstracto y la aritmética elemental al alcance del niño pequeño". Així doncs, la matemàtica informal es conceptualitza com una elaboració de la matemàtica intuïtiva. Però, tal i com exposa l'autor, aquest coneixement també té limitacions ja que a mesura que els nombres augmenten la seva utilitat disminueix. En aquest context apareix el tercer tipus de coneixement, el formal.

> La matemática formal puede liberar a los niños de los confines de su matemática relativamente concreta. Los símbolos escritos ofrecen un medio para anotar números grandes y trabajar con ellos. Los procedimientos escritos proporcionan medios eficaces para realizar cálculos aritméticos con números grandes. (Baroody, 1988: 45)

Així doncs, l'autor la descriu com la matemàtica escrita i simbòlica que s'imparteix a les escoles i que permet als infants superar les limitacions del coneixement informal. De tota manera, Baroody (1988: 46) atorga un paper crucial a la matemàtica informal ja que "es una base fundamental para comprender y aprender las matemáticas que se imparten en la escuela".

Per aquest motiu, començarem descrivint les estratègies informals utilitzades pels infants en la resolució de problemes de suma i de resta. Baroody (1988) les divideix en dues: els procediments concrets i els procediments mentals. En paral·lel, Carpenter i el grup d'investigadors que lidera (1999) parlen de les mateixes estratègies però les anomenen de diferent manera; concretament estratègia de modelització directa o amb objectes i estratègia de comptatge o comptant, respectivament.

En aquest treball s'utilitzarà la categorització elaborada per Carpenter et al. (1999) ja que en l'apartat anterior s'ha pres com a model la classificació de la tipologia de problemes confeccionada per aquests mateixos autors.

En primer lloc, aquests autors exposen que la modelització directa engloba totes les estratègies que els infants inventen per resoldre problemes aritmètics utilitzant objectes o els dits per representar les quantitats. Dins d'aquesta categoria trobem:

- **Unir-los tots (*Joining All*).** L'infant utilitza objectes o els dits per representar cada un dels sumands, els ajunta i els compta tots. *Exemple. Es construeix un conjunt de 3 objectes i un altre de 5. S'ajunten i es compten tots els objectes.*

- **Unir-los tots (*Joining to*).** L'infant fa un conjunt equivalent a la quantitat inicial i afegeix objectes en el conjunt equivalent fins que la nova col·lecció és igual a la quantitat total donada en el problema. *Exemple. Es construeix un conjunt de 3 objectes i es van afegint objectes al conjunt fins a tenir-ne 8. La resposta s'obté comptant el nombre d'objectes afegits.*

- **Separar-los (*Separating from*)**. L'infant construeix un conjunt d'objectes que representen la quantitat més gran en el problema i va traient els objectes assenyalats per la quantitat més petita. *Exemple. Es construeix un conjunt de 8 objectes, se'n separen 3. La resposta és el nombre d'objectes que queden.*

- **Separar-los (*Separating to*).** És una estratègia molt similar a l'anterior. La diferència és que els objectes s'eliminen a partir del conjunt més gran fins que el nombre d'objectes restants és igual a la quantitat més petita. *Exemple. Es construeix un conjunt amb 8 objectes. Se'n van traient fins que el nombre d'objectes és 5. La resposta és el nombre d'objectes que s'ha tret.*

- **Aparellar (*Matching*).** Aquesta consisteix en la construcció d'una correspondència d'un a un entre dos conjunts fins que un dels dos s'esgoti. *Exemple. Es construeixen dos conjunts d'objectes un amb 8 objectes i l'altre amb 3. Es van aparellant els objectes dels dos conjunts. La resposta és el nombre d'objectes del conjunt més gran que ens ha quedat sense aparellar.*

- **Assaig i error (*Trial and Error*).** Es construeixen un conjunt d'objectes i es van provant diferents quantitats fins a trobar la que correspon amb la final. Per tant, es tracta d'anar provant combinacions fins a trobar la correcta. *Exemple. Es construeix un conjunt d'objectes. S'afegeixen dos objectes al conjunt construït. Aleshores es compta el total. Si el total és 8 aleshores la resposta és el nombre d'objectes del conjunt inicial. Si el total no és 8, es torna a provar un altre conjunt.*

En segon lloc, pel que fa a les estratègies de comptatge, Carpenter et al. (1999: 18) descriuen que "són estratègies més eficients i abstractes que les de modelització amb objectes. L'infant les aplica quan compren que no cal construir ni comptar els dos conjunts descrits en un problema". Aquestes són les següents:

- **Comptar a partir de la quantitat inicial (*Counting on from first*).** L'infant comença a comptar cap endavant des del primer sumant. La seqüència acaba quan s'ha completat el nombre de passos de recompte que representa el segon sumand. *Exemple. Es parteix del 3 i es compta cap endavant 5 més: 4, 5, 6, 7 i 8. La resposta és l'últim número de la seqüència de comptatge.*

- **Comptar a partir de la quantitat més gran (*Counting on from larger*).** Aquesta estratègia és idèntica a l'anterior amb l'excepció que l'infant comença a comptar a partir del sumand més gran en comptes de la primera quantitat donada. *Exemple. Es parteix del 5 i es compta cap endavant 3 més: 6, 7 i 8. La resposta és l'últim número de la seqüència de comptatge.*

- **Comptar a partir de (*Counting on to*).** L'infant comença a comptar cap endavant començant des de la quantitat més petita. La seqüència acaba quan s'arriba a la quantitat més gran. *Exemple. Es compta començant pel 3 fins que s'arriba al 8. La resposta és el nombre de números de la seqüència numèrica que l'infant ha hagut de comptar.*

- **Separar-los (*Counting down*).** Aquesta estratègia és anàloga a la de "*Separating from*". L'infant comença a comptar enrere a partir de la quantitat més gran. *Exemple. Es comença a comptar endarrere des del 8. Cal anar 3 vegades cap endarrere: 7, 6 i 5. La resposta és l'últim número de la seqüència.*

- **Separar-los (*Counting down to*).** L'estratègia és molt semblant a l'anterior. La diferència es deu a que la seqüència cap endarrere continua fins que s'arriba al nombre més petit. *Exemple. Es comença a comptar endarrere del 8 fins arribar al 5. La resposta és el nombre de paraules de la seqüència de comptatge: 7,6 i 5.*

Per últim, Carpenter et al. (1999) a partir de les seves investigacions van elaborar una graella en la qual resumien la relació entre les estratègies utilitzades pels infants i la tipologia de problemes verbals. En el quadre es recullen tres de les quatre categories bàsiques: canvi –augment o disminució–; esquema parts-total i comparació.

Tipus de problema	Modelització amb objectes	Comptant
Canvi –augment (resultat desconegut)	Unir-los tots *(Join all)*	Comptar a partir de la quantitat inicial (*Counting on*)
Canvi –augment (canvi desconegut)	Unir-los tots (*Join to*)	Comptar a partir de (*Counting on to*)
Canvi –augment (inici desconegut)	Assaig i error (*Trial and error*)	Assaig i error (*Trial and error*)
Canvi –disminució (resultat desconegut)	Separar-los (*Separating from*)	Comptar endarrere (*Counting down*)
Canvi –disminució (canvi desconegut)	Separar-los (*Separating to*)	Comptar endarrere (*Counting down to*)
Canvi –disminució (inici desconegut)	Assaig i error (*Trial and error*)	Assaig i error (*Trial and error*)
Esquema parts-total (total desconegut)	Unir-los tots *(Join all)*	Comptar a partir de la quantitat inicial (*Counting on*)
Esquema parts-total (part desconeguda)	**	**
Comparació (diferència desconeguda)	Aparellar (*Matching*)	**
Comparació (quantitat desconeguda)	**	**
Comparació (referent desconegut)	**	**

Nota: **Indica que no hi ha una estratègia d'ús comú corresponent a l'acció o a la relació descrita en el problema.

Adaptació del quadre elaborat per Carpenter et al. (1999).

Fins ara hem descrit les estratègies informals per resoldre problemes verbals però tal i com apunten Carpenter et al. (1999) aquestes no són les úniques que poden aparèixer sinó que a mesura que els infants van aprenent els fets numèrics (*number facts*) van aplicant aquests coneixements en la resolució de problemes.

És per aquest motiu que creiem convenient mostrar les estratègies comunes de càlcul mental: d'addicció i sostracció; que Parrish (2010) inclou en el llibre *Number Talks. Helping children build mental and computation strategies*. L'autora exposa que aquestes estratègies es corresponen amb les idees matemàtiques que presenten els infants d'educació infantil i d'educació primària, fins a cinquè.

Per una banda, Parrish (2010) proposa vuit estratègies de càlcul mental per sumar:

- **Comptar-ho tot (*Counting all*).** Aquesta estratègia és pròpia d'educació infantil i també s'utilitza a principis de primer de primària. Els estudiants que la utilitzen encara no són capaços d'afegir un sumand amb l'altre directament. Tampoc poden visualitzar i retenir un nombre dins la seva ment, sinó que han de construir mentalment cada quantitat. *Exemple. Es parteix de la primera quantitat 3 i es compta endavant de un en un: 1, 2 i 3. A partir de l'últim número s'afegeix la segona quantitat 5: 4, 5, 6, 7 i 8. La resposta és l'últim número de la seqüència de comptatge mental: 1, 2, 3, 4, 5,6, 7, i 8.*

- **Comptar a partir de... (*Counting on*).** Aquesta estratègia es considera una evolució de l'anterior i es dóna quan els estudiants ja són capaços de conceptualitzar els nombres. Aquesta és anàloga a les estratègies additives de comptatge descrites per Carpenter i el seu grup de recerca. Així doncs, en aquesta l'infant comença a comptar endavant des d'una de les quantitats que reté mentalment. *Exemple. Es compta començant pel 3 fins que s'arriba al 8. La resposta es el nombre de números de la seqüència numèrica que l'infant ha hagut de comptar.*

- **Compensant (*Compensation*).** L'objectiu d'aquesta estratègia consisteix en manipular els nombres per convertir-los en més simples a l'hora d'afegir-los. L'infant treu una quantitat d'un sumand i afegeix exactament la mateixa quantitat en l'altre sumand per transformar els nombres en més "*friendly*[3]". Aquesta estratègia sol anar molt lligada a les de fer deus i fer dobles.

47 + 23 = 70	47 + 23 = 70
+3	+7
47 + 23	47 + 23
↓ ↓	↓ ↓
50 + 20	40 + 30
50+20= 70	40+30= 70

- **Descomponent els dos nombres segons el valor de posició de les xifres (*Breaking each number into its Place Value*).** L'estudiant descompon cada sumant de forma expandida i ajunta les xifres que ocupen el mateix valor de posició. Així doncs, per exemple, es combinen les desenes i les unitats. Els totals s'agreguen a partir de les quantitats anteriors. *Exemple:*

47 + 23 = 70

(40 + 7) + (20+3)

40+20= 60

7+3= 10

60+10= 70

- **Descomponent un dels nombres segons el valor de posició de les xifres (*Breaking one of the numbers into its Place Value- Adding up in chunks*).** Aquesta estratègia és molt similar a l'anterior. La diferència és que en aquesta l'estudiant manté un dels sumands sense descompondre i descompon l'altre de forma expandida. D'aquesta manera és més senzill ajuntar el segon nombre, el qual ha descompost segons el valor de posició de les xifres. *Exemple:*

47 + 23 = 70	**47 + 23 = 70**
47 + (20+3)	(40 +7) + 23
47+20= 67	40+23= 63
67+3= 70	63+7= 70

[3] Segons Parrish (2010: 62) "els *friendly numbers* o els nombres de referència són nombres més fàcils d'utilitzar en el càlcul mental".

- **Fent números de referència (*Making landmarks or friendly numbers*).** L'infant ajusta un o tots els sumands, ja sigui afegint o extraient una mateixa quantitat, amb l'objectiu de transformar els números en nombres de referència. Segons l'autora els nombres acabats en cinc, els múltiples de 10...; així com altres quantitats concretes com el 25 i el 50; són exemples que s'inclouen dins d'aquesta categoria. *Exemple:*

48 + 23 = 71

48 + 2 = 50

50+23= 73

73-2= 71

- **Fent deus (*Making tens*).** L'infant descompon ràpidament les quantitats presentades per formar deus. Segons l'autora l'objectiu d'aquesta estratègia és ser capaç d'utilitzar amb fluïdesa la descomposició del nombre 10 per accelerar el procés d'addició. *Exemple:*

8 + 9 = 17	**8 + 9 = 17**
(7+1) + 9	8 + (2+7)
7 + (1+9)	(8+2) + 7
7 + 10 = 17	10 + 7 = 17

- **Fent dobles (*Doubles / Near Doubles*).** L'infant ajusta un o els dos sumands per aconseguir dobles o una combinació propera als dobles. *Exemple:*

8 + 9 = 17	**8 + 9 = 17**	**8 + 9 = 17**
8 + (8+1)	(8+1) + 9	(8+2) + (9+1)
(8+8) + 1	9 + 9 = 18	10 + 10 = 20
16 + 1 = 17	18 - 1 = 17	20 - 3 = 17

Per altra banda, com a estratègies pròpies de la resta Parrish (2010) en planteja cinc. Abans de detallar-les és important subratllar una de les idees que exposa l'autora al introduir les estratègies de sostracció. Segons Parrish (2010) com més control i experiència tinguin els infants enfront les estratègies d'addició més ben preparats estaran per accedir i comprendre les estratègies de sostracció.

- **Ajustant un dels nombres per obtenir una resta més senzilla (*Adjusting one number to create an easier problem*).** L'infant ha de modificar un dels nombres, ja sigui afegint una o més unitats o bé traient una o més unitats. És important que l'alumne tingui en compte que al final també ha d'ajustar el resultat final per compensar la modificació inicial. Cal recordar que quan afegim o extraiem una quantitat en el subtrahend o bé en el minuend cal mantenir aquesta diferència sinó volem alterar el resultat. Tal i com apunta l'autora aquesta estratègia requereix que els alumnes comprenguin significativament la relació entre les parts i el tot per tal d'aplicar correctament aquests ajustos. *Exemple:*

73 - 29 = 44

73 – (29**+1**)

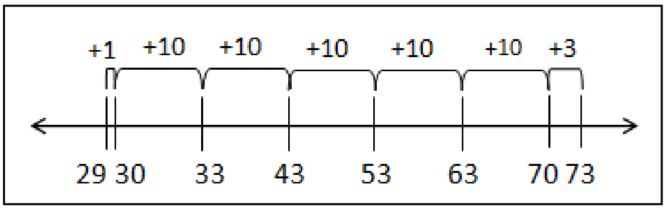
73 - 30 = 43

43 **+ 1** = 44

- **Comptant endarrere o descomponent el nombre a restar (*Removal or Counting back*).** L'infant comença pel minuend i compta endarrere la quantitat que marca el subtrahend, que prèviament ha descompost en quantitats més petites. L'autora afegeix que alguns estudiants compten cap endarrere de un en un i d'altres ja utilitzen mètodes més eficients com l'ús dels múltiples de deu. *Exemple:*

73 – 29 = 44

73 – (**+3+10+10 +10+10+1**) = 44



- **Descomponent un o els dos nombres segons el valor de posició de les xifres (*Place Value and Negative Numbers*).** L'infant descompon un o els dos nombres segons el valor de posició de les xifres, utilitzant la forma de notació expandida. L'alumne extreu les quantitats que ocupen el mateix valor de posició. Així doncs, per exemple, es resten les desenes amb les desenes i les unitats amb les unitats. *Exemple:*

73 - 29 = 44

73 + **1** = 74

-29 + **1** = 30

74 - 30 = 44

- **Mantenint una diferència constant (*Keeping a constant difference*).** L'infant ha d'aplicar en els dos nombres una modificació, ja sigui afegir una o més unitats o bé treure una o més unitats. Tots els canvis aplicats en el subtrahend s'han d'aplicar de la mateixa manera en el minuend. Ja que, quan afegim o extraiem la mateixa quantitat del subtrahend i del minuend la diferència entre les quantitats es manté. Segons l'autora poder manipular els nombres permet als estudiants treballar amb quantitats més senzilles o de referència sense afectar al resultat. *Exemple:*

73 - 29 = 44

(70 + 3) – (20 + 9)

70-20 = 50

3-9 = -6

50 - 6 = 44

- **Sumant cap endavant (*Adding up*).** L'infant parteix del minuend i compta cap endavant fins arribar a la quantitat que marca el subtrahend. Aquesta estratègia és molt similar a la d'adició **"**comptar a partir de" descrita per Carpenter i el seu grup d'investigadors. *Exemple:*

14 - 7 = 7

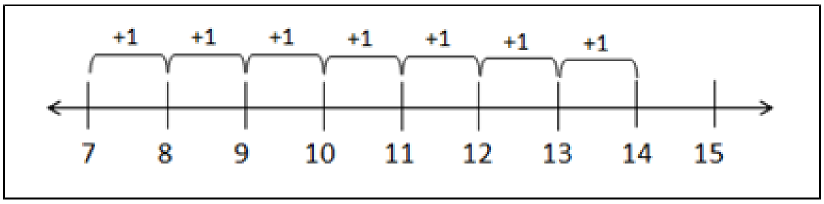
7 + **3** = 10

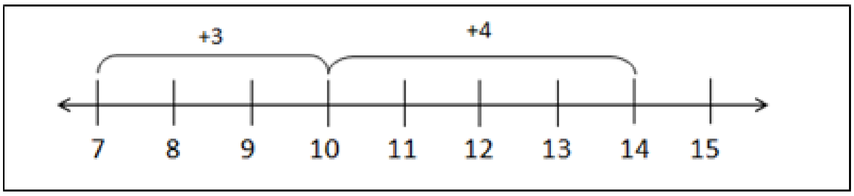
10 + **4** = 14

3 + 4 = 7

14 - 7 = 7

7 + **7** = 14





A partir d'una de les estratègies descrites per Parrish (2010), concretament la de descompondre un o els dos nombres segons el valor de posició de les xifres, en aquest treball s'ha dut a terme una adaptació per tal d'evitar operar amb nombres negatius. Aquesta decisió es va prendre tenint en compte la manca de coneixement dels infants enfront aquest conjunt de nombres.

Aquesta nova estratègia l'anomenarem **descompondre en nombres més petits** i consisteix en descompondre el minuend i el subtrahend en quantitats més petites i no segons el valor de posició de les xifres. Aquesta modificació permet als alumnes treballar diferents tipus de descomposició. *Exemple:*

73 – 29 = 44

$73 = \cancel{10}+\cancel{10}+\cancel{10}+10+10+10+10+3$

$29 = \cancel{10}+\cancel{10}+\cancel{9}$

$0 + 0 + 1 +10+10+10+10+3 = 44$

3. METODOLOGIA

En aquest capítol es presenta la part metodològica d'aquest treball de recerca. S'inicia amb una descripció de l'orientació metodològica i del paradigma de la investigació, així com de la metodologia educativa concreta: la investigació acció. A continuació, s'exposen els instruments utilitzats per recollir les dades durant la investigació i, finament, el procés que s'ha seguit per realitzar l'aplicació pràctica d'aquesta recerca.

3.1 Orientació metodològica

La perspectiva d'investigació escollida per realitzar aquest treball s'inclou dins dels paràmetres de la recerca interpretativa i qualitativa. En concret, aquest TFG s'acull al paradigma d'investigació educativa sociocrític perquè té com a objectiu introduir canvis en el procés de resolució de problemes per tal de provocar una millora dels factors que poden condicionar la comprensió i les estratègies aparegudes a l'hora de resoldre problemes de suma i de resta.

Es pot deduir doncs que la orientació metodològica d'aquest TFG està enfocada al canvi i a la presa de decisions, emmarcada dins el paradigma sociocrític. Aquesta recerca està en acord amb Kilpatrick al ser:

> Partidaria de conectar la investigación con la práctica, con la vista puesta hacia su cambio en la dirección de una mayor libertad y autonomía de los participantes. No es suficiente penetrar en una clase y observar el encuentro educacional. Se precisa también guiar directamente la práctica. (Kilpatrick, 1988, citat a Godino, 2010: 43)

Per tant, aquesta opció no es conforma en descriure una realitat específica sinó que va una mica més enllà i també busca millores.

Si centrem l'atenció en la metodologia educativa concreta parlarem de la investigació acció. Aquesta se centra en l'estudi d'una situació social per tal de millorar la qualitat de l'acció en la mateixa. Es tracta d'una activitat reflexiva dels "pràctics"-en aquest cas particular del professorat-, per tal d'afrontar situacions problemàtiques que puguin sorgir en el seu desenvolupament professional. Segons Latorre (2004) aquesta metodologia respon al conjunt d'activitats que duen a terme els professionals de l'àmbit educatiu amb l'objectiu de millorar la qualitat de les seves accions. En la mateixa línia Godino adapta les idees d'Elliot i de Kemmis i Mctarggart; i exposa que:

> La investigación acción es entendida en su aplicación al ámbito escolar, como el estudio de una situación social en la que participan maestros y estudiantes con objeto de mejorar la calidad de la acción, a través de un proceso cíclico en espiral de diagnóstico del problema, planificación, acción, reflexión y evaluación del resultado de la acción. (Godino, 2010: 23)

Tal i com s'apunta en la definició anterior, el disseny d'una investigació-acció implica una espiral de cicles: la planificació, l'acció, l'observació i la reflexió. Aquesta s'inicia amb la identificació d'un problema de recerca sobre la pràctica educativa, a continuació es planifica i es desenvolupa un pla d'acció, sovint de forma col·laborativa amb altres mestres o experts. Es recullen dades per l'observació: diaris personals, anècdotes, documents, fotografies, gravacions d'àudio o vídeo, entrevistes, etc. Les dades s'analitzen i s'avaluen els efectes per planificar l'acció següent.

En conseqüència, i per tal d'assolir l'objectiu inicial d'aquest TFG, s'elaborarà i es posarà en pràctica una investigació acció. En primer lloc s'identificarà el procediment i s'analitzarà la comprensió i les estratègies que utilitza un grup d'alumnes concret per resoldre problemes de suma i resta a partir d'una prova inicial. A continuació s'elaborarà un pla d'acció, que es concretarà en l'aplicació d'una proposta pràctica (seqüència d'activitats); i finalment s'avaluarà als infants tornant a passar la prova, que conté diferents problemes aritmètics, per tal d'identificar la comprensió i les estratègies emprades. D'aquesta manera, es podran analitzar i comparar els mètodes i les estratègies utilitzades pels alumnes en ambdues proves.

És important subratllar que aquesta perspectiva té com a objectiu l'anàlisi de les transformacions socials i l'elaboració de respostes als possibles problemes que es puguin generar. Per tant, empeny a la millora de l'acció educativa i a augmentar-ne la comprensió.

Finalment, cal afegir que aquesta metodologia d'investigació es caracteritza per ser participativa. És a dir, la duen a terme persones, professionals i educadors. Per aquest motiu, cal tenir en compte la posició subjectiva del recercador, un participant més en el procés de canvi però amb un paper crucial. Ja que, en funció de com hagi planificat cada una de les intervencions a l'aula, els resultats obtinguts poden variar significativament.

3.2. Instruments de la recerca

Donada la naturalesa d'aquesta investigació, les tècniques de recollida de dades que s'han seleccionat són: l'anàlisi de documents, l'observació, el diari personal i les gravacions en vídeo.

En primer lloc, l'anàlisi de documents es concreta en una prova de tipus personal (individual), de forma oral i estructurada dirigida a l'alumnat. Aquesta prova està formada per 15 problemes de suma i resta de diferents tipologies i graus de dificultat (*vegeu l'annex 1*). Dels problemes seleccionats, 14 s'han extret de la classificació elaborada per Carpenter et al. (1999), per tant, són tancats i admeten una única resposta com a solució.

Concretament se n'ha escollit un de cada tipus: 3 de canvi-augment, quan el resultat, el canvi o l'inici són desconeguts; 3 de canvi-disminució, quan el resultat, el canvi o l'inici són desconeguts; 2 d'esquema parts-total, quan el total o una part són desconeguts; 3 de comparació "més que", quan la diferència, la quantitat amb la que es que compara o el referent són desconeguts; i 3 d'igualació "més que", quan la diferència, la quantitat amb la que es que compara o el referent són desconeguts; incloent així les quatre categories bàsiques. A més dels esmentats, en la prova també conté un problema obert amb una doble incògnita i que s'inclou dins la categoria de canvi-augment, quan una part i el total són desconeguts.

La prova es dividirà en dues sessions. En la primera sessió els alumnes hauran de resoldre els problemes aritmètics de canvi –augment i disminució- i d'esquema parts-total i, en la segona sessió, els de comparació, els d'igualació i el problema obert.

En segon lloc, mentre els infants facin la prova, els observaré i aniré anotant quin processos segueixen per respondre els problemes proposats. També posaré atenció en la manera com els resolen, és a dir, quina comprensió en tenen i quines estratègies utilitzen.

En tercer lloc, el diari personal em servirà per anar escrivint aquells pensament, sensacions i reflexions més íntimes, sense perdre el caràcter testimonial. L'objectiu és poder recopilar dades, comparar-les i qüestionar les descobertes. A més, de recollir-hi altres aspectes interessants i rellevants per la recerca que potser no queden reflectits en cap altre document.

Per últim, mentre els infants facin la prova també els gravaré en vídeo per tal d'aprofundir en la recerca i poder analitzar situacions que han succeït durant la prova i que potser m'han passat per alt.

3.3 Procediment de la recerca

En aquest apartat es descriu el procediment que s'ha posat en pràctica per dur a terme aquest treball. S'inicia amb una explicació del procés seguit al llarg de la investigació, així com el disseny de la mateixa. A continuació, es detallen les característiques de la intervenció pràctica i dels criteris escollits a l'hora de seleccionar la mostra. Finalment, s'exposen els passos realitzats durant la prova.

3.3.1 Procés seguit en la investigació

Tal i com hem esmentat anteriorment, en el moment de dissenyar una investigació cal tenir en compte quatre passos: la planificació, l'acció, l'observació i la reflexió. Així doncs, abans d'elaborar un pla d'actuació, va ser necessària una fase de planificació, en la qual es va identificar el focus d'investigació, es va elaborar el diagnòstic de la situació i es va formular la hipòtesi d'acció o la proposta de canvi.

Durant aquesta fase es va decidir que es treballaria entorn a la resolució de problemes. Un cop escollida la temàtica calia acotar-la, vinculant-la a un bloc curricular. Es va apostar pel bloc curricular de numeració i càlcul tenint en compte l'àmbit educatiu determinat. A continuació, juntament amb altres mestres i experts implicats es va acordar utilitzar la classificació tipològica elaborada per Carpenter et al. (1999) i dins d'aquesta incidir en els problemes de suma i resta. Amb tot, la proposta encara no era prou concreta, així doncs vaig decidir centrar-me en la manera com els infants resolen aquestes tipologies de problemes, posant especial atenció en la comprensió i en les estratègies emprades.

Un cop superada la fase de planificació va començar la segona fase centrada a elaborar un pla d'actuació. En aquest cas, les accions planificades per tal de provocar un canvi concret i reflexiu en la pràctica educativa van iniciar-se amb la realització d'una primera prova. Aquesta tenia com a objectiu d'identificar de quina manera els alumnes resolien diferents tipus de problemes aritmètics i quines estratègies utilitzaven al llarg d'aquest procés. La primera prova es va passar a 12 infants[4] de 2n de primària amb diferents nivells d'aprenentatge a principis del mes de desembre de 2013.

A partir de l'observació i de l'anàlisi de les dades obtingudes en la primera prova (*vegeu l'annex 2*) es va elaborar un pla d'acció que consistia en l'aplicació d'una proposta didàctica dissenyada amb l'objectiu de millorar les dificultats detectades a l'hora de resoldre problemes. Per una banda, es van detectar dificultats en la resolució de problemes, sobretot per comprendre què demana l'enunciat; i, per altra banda, dificultats per operar amb restes on la xifra de les unitats del minuend és més gran que les del subtrahend. Per aquest motiu que la programació contenia dos objectius: millorar la comprensió i les estratègies de càlcul.

Per una banda, per millorar les dificultats de comprensió es va elaborar una seqüència d'activitats "Resolem problemes de suma i resta" (*vegeu l'annex 3*). En aquesta es va acordar treballar tres tipus de problemes tenint en compte els resultats de la primera prova, la durada de la intervenció, els objectius curriculars de cicle inicial i la programació d'aula. Concretament, es va incidir en la tipologia de canvi -augment o disminució- quan l'inici és desconegut; i en la d'esquema parts-total quan hi ha una part desconeguda. Es va creure oportú deixar els problemes de comparació i d'igualació per treballar-los en cursos superiors.

Per altra banda, per millorar les estratègies a l'hora de resoldre problemes es va preparar una altra seqüència d'activitats "Aprenem estratègies de càlcul mental pròpies de la resta" (*vegeu l'annex 4*). Aquesta tenia com a finalitat ensenyar als alumnes tres estratègies pròpies de la resta: descompondre en nombres més petits, sumar cap endavant i mantenir una diferència constant. Per qüestions de temps i del ritme d'aprenentatge dels infants només es van treballar les dues primeres.

Les seqüències d'activitats es van elaborar amb l'objectiu de comprovar si a través de la intervenció pràctica els infants milloraven la seva competència a l'hora de resoldre problemes additius.

[4] Una mostra significativa del grup-classe format per 25 alumnes.

Durant els mesos de gener, febrer i març, es va aprofitar l'estada de *Pràctiques III* per dur a terme la intervenció, és a dir, per aplicar les propostes didàctiques específiques en la mateixa classe de 2n de primària en la qual havia seleccionats a alguns infants per passar la prova.

Un cop finalitzada la intervenció pràctica, durant el mes d'abril es va repetir la mateixa prova[5] als alumnes[6] per tal de recollir dades sobre la progressió al resoldre problemes. Concretament per tal d'identificar i analitzar de nou la comprensió i les estratègies emprades.

Per últim, es van analitzar i es van comparar els resultats obtinguts en les dues proves. Aquesta última fase dedicada a la reflexió i a la interpretació dels resultats és bàsica ja que pressuposa entendre molt bé el què ha passat i el perquè ha passat. Així doncs, caldrà avaluar i valorar l'eficàcia del pla d'acció, és a dir, de les propostes didàctiques dissenyades i de les intervencions efectuades dins de l'aula.

3.3.2 Intervenció pràctica

La intervenció pràctica es va dur a terme amb alumnes de 2n de primària de l'Escola Quatre Vents de Manlleu durant el segon trimestre del curs 2013-2014. Concretament a la classe de 2nA "L'amor de les tres taronges" que actualment està formada per 23 alumnes. Cal tenir en compte que quan vaig començar les pràctiques eren 25 però dues alumnes van deixar l'escola, ja que les famílies es va traslladar a viure a l'estranger.

Durant l'estada de pràctiques, dos o tres cops per setmana, vaig incidir en la resolució de problemes amb l'objectiu de desenvolupar i de millorar la competència dels infants per resoldre problemes. Concretament, durant la intervenció vaig utilitzar les sessions de matemàtiques amb el grup-classe, dimarts i dimecres, per aplicar les propostes didàctiques específiques. Els dimarts els vaig dedicar a introduir noves estratègies pròpies de la resta i els dimecres al propi procés de resolució de problemes. Cal afegir, que a més d'aquestes dues sessions fixes a la setmana, els divendres es dedicava una hora més a corregir problemes.

[5] Només es va passar la primera part de la prova formada per 8 problemes: 3 de canvi-augment, 3 de canvi-disminució i 2 d'esquema parts-total; en acord amb la tipologia de problemes seleccionats per treballar durant la intervenció.

[6] En aquesta ocasió, no van ser 12 alumnes sinó 10. (*vegeu apartat 3.3.3*)

Totes les accions planificades perseguien el mateix objectiu de millorar les dificultats detectades en la prova inicial en relació al propi procés de resolució de problemes i també al operar amb restes, sobretot amb restes on la xifra de les unitats del minuend és més gran que les del subtrahend.

3.3.3 Criteris de selecció de la mostra

Tal i com he dit anteriorment durant el mes de desembre es va passar una prova a 12 infants de 2n de primària per tal de recollir dades per posteriorment analitzar-les i poder decidir el pla d'acció. Específicament d'aquests 12 alumnes, la meitat eren nens i la meitat eren nenes. A més del gènere, en el moment de fer la tria sobretot es va tenir en compte els diferents nivells d'aprenentatge dins de l'aula. Així doncs, els infants seleccionats estaven distribuïts en 3 nivells diferenciats: 4 alumnes amb dificultats o dificultats greus d'aprenentatge; 4 alumnes que van avançant, cadascú al seu ritme; i 4 alumnes amb un ritme d'aprenentatge més ràpid, alguns d'ells sobretot en matemàtiques.

Aquests criteris a l'hora de seleccionar la mostra tenen com a finalitat intrínseca analitzar la manera com alumnes amb un nivell d'aprenentatge heterogeni resolen problemes, a més d'observar les estratègies que utilitzen. Així doncs, la tria d'aquests 12 infants no va ser arbitrària.

Entre els mesos de desembre i abril dues alumnes, a les quals havia passat la prova, van deixar el centre educatiu. Per aquest motiu, la segona prova només la vaig poder passar a 10 alumnes. Aquestes dues baixes van descompensar notablement l'equitat en el gènere de la mostra: 6 nens i 4 nenes. Però, en relació als diferents nivells d'aprenentatge, l'alteració d'aquest criteri va ser menor, ja que les dues pertanyien a nivells diferents. Així doncs, els grups van quedar de la manera següent: 3 alumnes amb dificultats o dificultats greus d'aprenentatge; 4 alumnes que van avançant, cadascú al seu ritme; i 3 alumnes amb un ritme d'aprenentatge més ràpid, alguns d'ells sobretot en matemàtiques.

Per tal que la comparació entre les dues proves sigui vàlida, en l'anàlisi només es tindran en compte els resultats dels 10 alumnes que van passar les dues proves.

3.3.4 Realització de la prova

Amb l'objectiu de conèixer el punt de partida, és a dir, els coneixements inicials que tenien els 12 infants seleccionats sobre cada tipologia de problema vaig elaborar una prova que contenia 15 problemes de suma i resta. Aquests els vaig distribuir en dues proves diferenciades. Tal i com he esmentat anteriorment, l'anàlisi de les dades recollides em va permetre detectar les dificultats a l'hora de resoldre problemes i, conseqüentment, delinear un propòsit d'acció per esmenar-les.

Per tal de legitimar la comparació dels resultats obtinguts és necessari que les proves es passin als mateixos infants i que s'utilitzi el mateix procediment, contingut i materials. Per aquest motiu, vaig preparar una pauta per la prova que incloïa tots aquells passos a tenir en compte i que calia explicar als infants. Així doncs, abans de començar la prova individual els explicava que tenia uns quants problemes per resoldre i que podien utilitzar els materials que volguessin, ja fos el cuc de boles, el foli, mentalment, etc. Continuava dient que els hi aniria donant els problemes de un en un i que abans de començar calia que llegissin en veu alta. Un cop llegit ja podien començar a resoldre'l com volguessin, sense presses.

Una qüestió que no podia deixar a l'atzar era l'ordenació dels problemes. Per aquest motiu, vaig decidir que els classificaria en funció del grau de dificultat, de menys a més difícil, a partir de les investigacions elaborades per Carpenter et al. (1999). L'ordre va ser el següent: canvi-augment quan el resultat és desconegut, esquema parts-total quan el total és desconegut, canvi-disminució quan el resultat és desconegut, canvi-augment quan el canvi és desconegut, esquema parts-total quan una part és desconeguda, canvi-disminució quan el canvi és desconegut, canvi-augment quan l'inici és desconegut i canvi-disminució quan l'inici és desconegut.

Un aspecte que calia tenir en compte, sobretot en la primera prova, era que els infants avaluats pràcticament no em coneixen. Per tant, al ser una persona de fora l'escola no em tenien la confiança que tenen amb la tutora de l'aula. Per tal d'evitar que se sentissin observats i que es posessin més nerviosos els comentava que mentrestant jo també faria alguna altra tasca i que no tenia cap pressa. Per tant, que provessin de solucionar el problema al seu ritme.

També vaig preparar un seguit de preguntes per tal d'aprofundir en la observació i en la comprensió del procés, és a dir, que m'ajudessin a determinar quin procés seguien els infants i què havien entès en cada problema. Vaig agrupar les qüestions en dos grans apartats en funció de si els alumnes sabien o no sabien resoldre el problema. També, vaig incorporar un tercer apartat per saber com actuar si algun infant anava molt perdut. Són els següents:

a. Si el saben fer, els demanaré:
    i. Com ho has fet? Com l'has resolt? M'ho expliques?
    ii. En què has pensat per resoldre'l?

b. Si no els saben fer, els demanaré:
    i. Com ho has fet? Com l'has resolt? M'ho expliques amb les teves paraules?
    ii. Explica'm el problema amb les teves paraules.
    iii. Què has entès del problema?
    iv. Què ens demana el problema?
    v. Què ens diu el problema?
    vi. Quines dades trobem en el problema?
    vii. Què hem de buscar en aquest problema?

c. Si observo que van molt perduts els proposaré el mateix problema simplificat. Si veig que tampoc se n'ensurt:
    i. No passa res! En tinc un altre. Potser aquest t'anirà millor de resoldre.
    ii. Jo també n'estic aprenent de posar problemes. M'estàs ajudant molt!

En la prova del mes d'abril ja no va ser necessari explicar als infants què havien de fer perquè ja ho sabien, havien interioritzat la manera de procedir.

Per últim, cal assenyalar que la recollida de dades ha estat molt curosa i sistemàtica, a més de dur-la a terme segons el pla establert. No podem oblidar que aquestes dades seran utilitzades, més endavant, per evidenciar els canvis que s'han produït. A partir de la contrastació de les dades obtingudes en les dues proves s'extrauran les conclusions i es comprovarà si els objectius inicials s'han complert. A més d'avaluar els efectes obtinguts i, si s'escau, planificar l'acció educativa següent.

4. ANÀLISI DE DADES I RESULTATS

En aquest capítol es descriu detalladament el procés seguit a l'hora d'analitzar les dades obtingudes en la prova, tan al mes de desembre com al mes d'abril. També es presenten quins són els resultats d'aquestes proves, fent incís en els objectius inicials de la recerca: la comprensió i les estratègies emprades pels infants durant la resolució de problemes de suma i resta.

4.1 Procés d'anàlisi de les dades

Un cop passada la primera prova, a principis del mes de desembre, calia iniciar una altra fase centrada en analitzar les dades. Tal i com he descrit anteriorment, concretament en l'apartat 3.2, durant la prova inicial a més d'observar als infants també els vaig gravar en vídeo per tal de tenir constància de la manera com cada un d'ells havia resolt els problemes proposats. Aquestes gravacions em van permetre tornar a veure què feia cada alumne i d'aquesta manera aprofundir en la recerca, al poder analitzar de nou algunes situacions que havien succeït durant la prova i de les quals no en tenia bons apunts o potser m'havien passat per alt.

A partir de les anotacions i de les observacions[7] fetes vaig dur a terme un buidat de les dades en una graella, una per cada tipologia de problema, sumant un total de 15 taules de buidat. Aquestes estaven dividides en tres grans apartats: comprensió, procés i resposta. Cal afegir que l'apartat de procés es subdividia en dos més: ús de material i errors durant el procés, i que l'apartat de resposta quedava subdividit en tres més: càlculs utilitzats, estratègies emprades i resultat.

També, cal assenyalar que per diferenciar cada tipologia de problema és va utilitzar una nomenclatura específica formada per un número i per una lletra. Per una banda, els números poden anar de l'1 al 6 i indiquen la categoria a la qual pertany el problema. I, per altra banda, les lletres en podem trobar de la A a la C i indiquen la posició de la incògnita.

A tall d'exemple, la taula de buidat que s'ajunta a continuació recull les dades obtingudes en la prova de desembre del problema de canvi-augment quan el resultat és desconegut. Per tant, correspon a l'abreviació 1A. La resta de graelles elaborades s'afegiran a l'annex. (v*egeu els annexos 5 i 6*)

[7] Es recollien sistemàticament en unes graelles que omplia per cada tipus de problema. (*vegeu l'annex 7*)

	Comp	Procés		Resposta		
		Material	Errors	Càlculs	Estratègies	Resultat
Èr	Sí	No	diu 60, quan ho explica s'adona que és 70	4+2 = 6 (40 + 20 = 60) ; 3+7 = 10; 60 + 10 = 70	Mentalment: - descompondre segons valor posició - fer deus	70
Ge	Sí	No	No	4+2 = 6 (40 + 20 = 60) ; 3+7 = 10; 60 + 10 = 70	Mentalment: - descompondre segons valor posició - fer deus	70
Jo	Sí	No	No	40 + 20 = 60; 60 + 3 = 63 (3 del 23); 63 + 7 (7 del 47)	Mentalment: - descompondre segons valor posició	70
Ya	Sí	No	diu 47, quan ho explica s'adona que és 70	40 + 20 = 60; 3+7 = 10; 60 + 10 = 70	Mentalment: - descompondre segons valor posició - fer deus	70
Ai	Sí	No	No	4+2 = 6 ; 3+7 = 10 ; 60 + 10 = 70	Mentalment: - descompondre segons valor posició - fer deus	70
Ca	Sí	Cuc de boles	diu 69, però no està segura i ho vol comprovar (material)	Separa 47 (10+10+10+10 = 40 i compta 7 de 1 en 1). Diu 70: 7 + 3 = 10; 2 + 4 = 6 (20 + 40 = 60); 10 + 60 = 70	Procediments concrets: - unir-los tots - comptar de 10 en 10 - comptar de 1 en 1	70
Sa	Sí	Cuc de boles	No	Separa 40 (10+10+10+10) i afegeix 7 (separa 7 i 3 que fan 10). Al 47 li suma 3 i 20 (10 + 10) Compta les boles de 10 en 10 fins a 70	Procediments concrets: - unir-los tots - comptar de 10 en 10 - comptar de 1 en 1	70
Se	Sí	Cuc de boles	No	Separa 40 (10+10+10+10) i afegeix 7 (separa 7 i 3 que fan 10). Al 47 li suma 3 i 20 (10 + 10) Compta les boles de 10 en 10 fins a 70	Procediments concrets: - unir-los tots - comptar de 10 en 10 - comptar de 1 en 1	70
Ha	Sí	Cuc de boles	diu 51 (4 + 7 = 10; 2 + 3 = 5; total 51), no s'està segur i ho vol comprovar (material). Deixa les boles del 23 fins al 30 i posa el 47	Separa 14 boles i diu que n'hi ha 23. Torna a separar-les, ara 23 (compta de 1 en 1). En separa 47 (10+10+10+10 i 7) deixa les 7 entre mig.	Procediments concrets: - unir-los tots - comptar de 10 en 10 - comptar de 1 en 1	87
Jú	Sí	Foli	diu 90, diu 60, no n'està segura i ho vol comprovar (foli)	4 + 2 + 3 = 90 | 4 + 2= 6 / 3 + 7 = 10 / 60? | 40 + 23 (40 + 7 i 20 + 3 / 60 + 10 = 70)	Mentalment amb suport escrit: - fer deus -descompondre segons el valor posició	70
Ma	Sí	Cuc de boles	No té en compte les 3 boles del 47 al 50 i posa el nombre següent (23)	Separa 47 (10+10+10+10 = 40 i compta 7= 3 +3 + 3). N'afegeix 23 (10 + 10 + 3). Suma el total de 10 en 10 i les 3 unitats	Procediments concrets: - unir-los tots - comptar de 10 en 10 - comptar de 1 en 1	73
Ye	Sí	Cuc de boles	Confon els nombres, al 47 li diu 74 i al 23, 32. Després del 23 diu 27. No té en compte les 3 boles del 47 al 50 i posa el nombre següent (23)	Posa 37 bales (quan en vol posar 47), ho comprova comptant de 1 en 1, s'adona que s'ha equivocat i en posa 47. N'afegeix 3 boles i les entén com a desena, n'afegeix 3 (li sembla que ja n'ha afegit 23). Ho suma tot, les desenes de 10 en 10 i les 3 unitats	Procediments concrets: - unir-los tots - comptar de 10 en 10 - comptar de 1 en 1	53

Canvi (Augment) - 1A [47+23= **70**]

L'extens buidat de les dades recollides em va permetre elaborar una segona taula en la qual vaig seleccionar el primer i l'últim apartat de les taules de buidat. És a dir, la informació en relació a la comprensió o no del problema i al resultat obtingut, si era correcte o incorrecte. A més a més, vaig incloure una altra columna en la qual es recollia el tipus de dificultat observada.

A continuació s'ajunta la primera graella elaborada durant el mes de desembre i en la qual es recull la informació dels 12 alumnes que van passar la prova inicial.

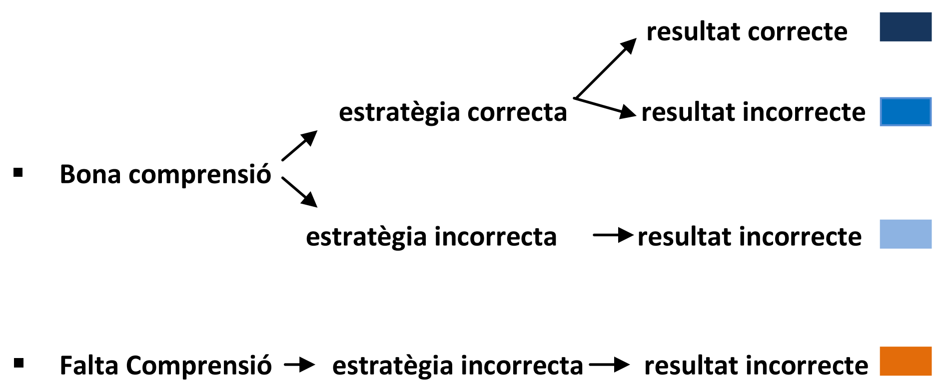
		Comprensió				Resultat				Dificultats
		Sí		No		Correcte		Incorrecte		Tipologia
Canvi (augment)	**1A**	12	100%			9	75%	3	25%	Comptatge
	1B	10	83,30%	2	16,60%	10	83,30%	2	16,60%	Comprensió
	1C	6	50%	6	50%	3	25%	9	75%	Comprensió
Canvi (disminució)	**2A**	10	83,30%	2	16,60%	6	50%	6	50%	Operació
	2B	10	83,30%	2	16,60%	6	50%	6	50%	Operació
	2C	7	58,30%	5	41,60%	6	50%	6	50%	Comprensió
Esquema parts-total	**3A**	12	100%			10	83,30%	2	16,60%	Operació
	3B	6	50%	6	50%	3	25%	9	75%	Comprensió / Operació
Comparació	**4A**	7	58,30%	5	41,60%	6	50%	6	50%	Comprensió
	4B	8	66,66%	4	33,33%	8	66,66%	4	33,33%	Comprensió
	4C	6	50%	6	50%	6	50%	6	50%	Comprensió
Igualació	**5A**	5	41,60%	7	58,30%	5	41,60%	7	58,30%	Comprensió
	5B	5	41,60%	7	58,30%	4	33,33%	8	66,66%	Comprensió
	5C	9	75%	3	25%	6	50%	6	50%	Comprensió
Problema Obert	**6A**	4	33,33%	8	66,66%	5	41,60%	7	58,30%	Comprensió

Els resultats numèrics de les dades obtingudes em van servir per decidir i planificar la següent acció. Aquesta consistia en l'aplicació de dues propostes didàctiques elaborades amb l'objectiu de millorar les dificultats detectades.

Després de posar en pràctica i finalitzar la intervenció, vaig tornar a passar la mateixa prova[8] per recollir noves dades que mostressin la progressió dels alumnes a l'hora de resoldre problemes. Per tal de poder comparar òptimament les dades obtingudes, es va dur a terme un buidat de la segona prova utilitzant les mateixes graelles i criteris que en la primera. També, es va elaborar una segona taula a partir dels apartats de comprensió i de resultat. (*vegeu l'annex 8*)

Cal tenir en compte que, per motius externs a la recerca, la segona prova es va passar a 10 alumnes en comptes de 12. És per això que es va haver de modificar la taula de la primera prova excloent a les dues alumnes que no van passar la segona prova. Es van tornar a calcular els resultats tenint en compte únicament als 10 infants que havien passat ambdues proves. (*vegeu l'annex 9*)

A més de les dues taules esmentades, es va elaborar un tercer model de taula per tal de poder analitzar i comparar específicament la comprensió i les estratègies emprades pels infants en les proves. Aquestes taules s'anomenaran de resultats. Per una banda, per assenyalar el grau de comprensió es va decidir utilitzar dos colors principals: el blau per marcar bona comprensió i el taronja per indicar falta de comprensió. De manera paral·lela, dins de l'apartat de "bona comprensió" es va dur a terme una altra subdivisió, corresponentment marcada amb una gradació de blaus, en funció de si els alumnes utilitzaven una estratègia correcta o incorrecta. I en el cas que utilitzessin una estratègia correcta, si el resultat era correcte o no. Així doncs, la llegenda de colors va quedar de la següent manera:



[8] En aquesta ocasió només es va passar la primera part de la prova formada per 8 problemes: 3 de canvi-augment, 3 de canvi-disminució i 2 d'esquema parts-total; d'acord amb la tipologia de problemes seleccionats per treballar al llarg de la intervenció.

Per altra banda, es van incloure les estratègies utilitzades pels alumnes en cada tipologia de problema segons la classificació elaborada per Carpenter et al. (1999). Però, a més a més, aquestes es van emmarcar dins els tipus de coneixements establerts per Baroody (1988). En aquest cas concret, el coneixement informal -procediments concrets- i la matemàtica formal, -mentalment o mentalment amb suport escrit-.

En les taules sovint s'utilitzen abreviacions per referir-se a cada tipus de coneixement i estratègia. És per aquest motiu que es va elaborar les llegendes següents:

S/R	Sense Resposta

Con. Informal	Coneixement Informal
Unir	Unir-los tots (*Joining all*)
Unir-los*	Unir-los tots (*Joining to*)*
Separ.	Separar-los (*Separating from*)
Separ.*	Separar-los (*Separating to*)*
Dits	Dits
Obj	Objectes

Mat. Formal	Matemàtica Formal
MSE	Mentalment amb suport escrit
M	Mentalment
DVP	Descompondre segons el valor de posició de les xifres
Deus	Fer deus
Comp	Compensar
Dobles	Fer dobles
DNP	Descompondre en nombres més petits
NR	Nombres de referència
SCE	Sumar cap endavant

A continuació s'adjunta una d'aquestes graelles de resultats per il·lustrar el descrit. En concret la taula resumeix els resultats obtinguts al desembre del problema de canvi-augment quan el resultat és desconegut (1A). Es pot deduir fàcilment que les dades es corresponen amb la taula de buidat presentada a l'inici de l'apartat.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	**TOTAL**
Con. Informal	Unir-los tots	Dits													0
		Obj						x	x	x	x			x	5
Mat. Formal	Mentalment amb se	DVP										x			1
		Deus										x			1
		Comp													0
	Mentalment	DVP	x	x	x		x								4
		Deus	x	x			x								3

Taula 1. D – 1A

Per acabar, afegir que amb l'objectiu d'identificar i de catalogar cada una de les taules utilitzaré el mateix codi de registre. Per una banda, senyalaré si corresponen a la primera o la segona prova passades al mes de desembre i d'abril respectivament. Per aquest motiu, utilitzaré la primera lletra de cada mes: la D i la A per diferenciar-les amb claredat. I, per altra banda, afegiré el número i la lletra emprats per distingir cada tipologia de problema, tal i com s'ha explicat anteriorment. D'aquesta manera la taula anterior quedarà registrada com a: **D – 1A**.

4.2 Resultats de la prova de desembre

Un cop descrit el procés que s'ha seguit per analitzar les dades ara és el moment d'exposar els resultats. En aquest treball només s'analitzaran les 8 tipologies de problemes de la primera prova d'acord amb les categories bàsiques escollides per treballar específicament durant la intervenció i que es detallen a continuació.

Per presentar els resultats començarem amb la categoria de canvi-augment, continuarem amb la de canvi-disminució i acabarem amb la d'esquema parts-total. A més a més, dins de cada categoria es desglossaran les tipologies de problema corresponents.

Per últim, cal afegir que per cada tipus de problema es durà a terme una doble anàlisi. Per una banda es descriuran els aspectes lligats a la comprensió i, per altra banda, es detallaran les estratègies observades durant el procés de resolució.

4.2.1 Problemes de canvi – augment

En aquest apartat s'analitzaran les taules de resultats obtingudes a partir dels tres problemes de canvi – augment inclosos en la primera prova. En primer lloc, s'exposaran les dades recollides quan el resultat és desconegut, a continuació quan el canvi és desconegut i, finalment, quan l'inici és desconegut.

- <u>Problema de canvi – augment quan el resultat és desconegut</u>

Pel que fa a la comprensió, en la taula es pot observar que la totalitat dels infants entén el problema i utilitza una estratègia adequada per resoldre'l.

En relació a les estratègies, la meitat dels infants es situen en el nivell de coneixement informal i l'altre meitat en el formal. Concretament, 5 alumnes (**Ca, Sa, Se, Ha** i **Ye**) fan servir l'estratègia d'unir-los tots (*Joining all*), manipulant objectes concrets. La resta d'infants resolen el problema mentalment, 4 d'ells sense cap tipus d'ajuda (**Èr, Ge, Jo** i **Ai**) i 1 utilitzant el suport escrit (**Jú**). Si ens centrem específicament en les estratègies, tots ells fan servir la de descompondre segons el valor de posició de les xifres i la de fer deus, exceptuant en **Jo** que només utilitza la de descompondre.

Dels 10 alumnes, 8 (**Èr, Ge, Jo, Ai, Ca, Sa, Se** i **Jú**) arriben al resultat correcte. Els altres 2 (**Ha** i **Ye**) comenten un error de comptatge l'hora de comptar els objectes i conseqüentment arriben a una solució errònia.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
Con. Informal	Unir-los tots	Dits													0
		Obj						x	x	x	x			x	5
Mat. Formal	Mentalment amb se	DVP										x			1
		Deus										x			1
		Comp													0
	Mentalment	DVP	x	x	x		x								4
		Deus	x	x			x								3

Taula 1. D – 1A

- <u>Problema de canvi – augment quan el canvi és desconegut</u>

Per començar, si ens fixem en els aspectes relacionats amb la comprensió, fàcilment podem observar que la majoria dels infants van entendre què demanava l'enunciat, a més de triar l'estratègia adequada i arribar a un resultat correcte. En concret parlem de 8 alumnes (**Èr, Ge, Jo, Ai, Ca, Sa, Se** i **Jú**). Els dos altres infants (**Ha** i **Ye**) els va mancar la comprensió i, per aquest motiu, no van fer ús de cap estratègia ni van acabar formulant cap resposta.

Així doncs, pel que fa a les estratègies, el primer que cal assenyalar és que aquests dos alumnes (**Ha** i **Ye**) no n'utilitzen cap. Dels 8 alumnes que falten, 3 (**Sa, Se** i **Jú**) utilitzen l'estratègia d'unir-los tots (*Joining to*) inclosa dins el nivell de coneixement informal. Per posar-la en pràctica en **Se** utilitza els dits com a suport i la **Sa** i la **Jú** fan servir objectes.

Els altres 5 ho fan mentalment i s'inclouen dins la matemàtica formal. Utilitzen diferents estratègies: en **Jo** i l'**Ai** fan dobles, la **Ca** busca nombres de referència i l'**Èr** i en **Ge** descomponen segons el valor de posició de les xifres, en aquest cas vàlida ja que la xifra de les unitats del minuend és més gran que la xifra de les unitats del subtrahend.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	**TOTAL**
		S/R									x			x	**2**
Con. Informal	Unir	Obj													**0**
	Unir-los tots*	Dits								x					**1**
		Obj							x			x			**2**
Mat. Formal	MSE	DVP													**0**
	Mentalment	DVP	x	x											**2**
		Dobles			x		x								**2**
		NR						x							**1**
		DNP													**0**

Taula 2. D – 1B

- <u>Problema de canvi – augment quan l'inici és desconegut</u>

Per una banda, en relació a la comprensió, és el primer tipus de problema en el qual observem que el nombre d'alumnes que no l'entenen és més elevat dels que sí que ho fan. Només 4 (**Èr, Jo, Ca** i **Se**) dels 10 infants avaluats van entendre què demanava l'enunciat. Aquestes dades ens demostren que més de la meitat d'infants, en concret 6 (**Ge, Ai, Sa, Ha, Jú** i **Ye**) no el va comprendre. És per aquest motiu que aquesta tipologia de problemes es va triar per treballar-la específicament durant la intervenció.

Per altra banda, pel que fa a les estratègies, en la taula s'observa que gairebé la meitat dels infants, concretament 4 (**Ge, Sa, Ha** i **Ye**) no utilitzen cap estratègia ni donen cap resultat com a conseqüència d'una manca de comprensió. La resta d'alumnes sí que utilitzen alguna estratègia encara que no totes siguin adequades per resoldre el problema.

En primer lloc, trobem a un sol alumne, en **Se,** que es situa en el nivell de coneixement informal i que utilitza una estratègia concreta: unir-los tots (*Joining to*). Cal subratllar que gràcies a la modelització amb objectes en **Se** arriba a la solució correcta.

Els altres 5 infants (**Èr, Jo, Ai, Ca** i **Jú**) es situen dins del coneixement formal i resolen el problema mentalment, amb o sense suport escrit. L'**Ai,** la **Ca** i la **Sa** s'ajuden del suport escrit. Totes tres utilitzen l'estratègia de descompondre segons el valor de posició de les xifres. La **Ca** és la única que entén el problema i fa una resta però no arriba a un resultat correcte. Ja que l'estratègia utilitzada no és adequada quan la xifra de les unitats del subtrahend és més gran que la xifra de les unitats del minuend, sense fer servir nombres negatius.

L'**Ai** i la **Sa** al no comprendre el problema van utilitzar la mateixa estratègia per afegir les quantitats en comptes d'extreure-les. Conseqüentment, ambdues van arribar a un resultat incorrecte.

Per últim, els 2 alumnes restants (**Èr** i **Jo**) resolen l'operació mentalment sense cap suport. L'**Èr** fa servir l'estratègia de descompondre segons el valor de posició de les xifres, que tal i com hem esmentat no és vàlida per arribar al resultat correcte. I en **Jo** utilitza la de fer dobles que li serveix per obtenir la solució correcta.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	**TOTAL**
		S/R		x					x		x			x	**4**
Con. Informal	Unir	Obj													**0**
	Unir*	Obj								x					**1**
	Separ.	Obj													**0**
Mat. Formal	MSE	DVP					x	x				x			**3**
		DNP													**0**
	Mentalment	DVP	x												**1**
		Dobles			x										**1**
		DNP													**0**
		SCE													**0**

Taula 3. D – 1C

4.2.2 Problemes de canvi – disminució

En aquest apartat s'analitzaran les taules de resultats obtingudes a partir dels tres problemes de canvi – disminució inclosos en la primera prova. Primerament, s'exposaran les dades recollides quan el resultat és desconegut, a continuació quan el canvi és desconegut i, per acabar, quan l'inici és desconegut.

- Problema de canvi – disminució quan el resultat és desconegut

Si ens centrem en el grau de comprensió, en la taula fàcilment s'observa que la majoria dels infants, concretament 8 (**Èr, Ge, Jo, Ca, Sa, Se, Ha** i **Jú**) comprenen què demana el problema. Mentre que 2 (**Ai** i **Ye**) no ho fan.

Pel que fa a l'ús d'estratègies, 6 dels alumnes s'emmarquen dins el coneixement informal fent ús de la modelització amb objectes i 4 dins de la matemàtica formal. Dels 6 primers, 5 infants (**Jo, Ca, Sa, Ha** i **Jú**) utilitzen l'estratègia de separar-los (*Separating from*) i són els únics que arriben a un resultat correcte. L'alumna que falta utilitza una estratègia inadequada unir-los tots (*Joining all)* com a conseqüència d'una manca de comprensió.

Cap dels 4 alumnes que utilitzen procediments abstractes aconsegueix la solució correcta. Tots ells (**Èr, Ge, Se** i **Ye**) utilitzen la mateixa estratègia: descompondre segons el valor de posició de les xifres. Resolen l'operació mentalment però els dos primers (**Èr** i **Ge**) ho fan sense cap tipus de suport i els altres 2 (**Se** i **Ye**) utilitzant el suport escrit.

Tal i com hem esmentat en el problema anterior aquesta estratègia no és vàlida quan la xifra de les unitats del subtrahend és més gran que la xifra de les unitats del minuend, sense fer servir nombres negatius. Per aquest motiu, l'**Èr**, en **Ge** i en **Se** no arriben a la solució correcta.

Per últim, esmentar que en **Ye** fa servir aquesta mateixa estratègia però l'utilitza per sumar a causa d'una manca de comprensió de l'enunciat.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	**TOTAL**
Con. Informal	Unir	Obj					x								**1**
	Separ.	Obj			x			x	x		x	x			**5**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP								x				x	**2**
		DNP													**0**
		SCE													**0**
	Mentalment	DVP	x	x											**2**
		DNP													**0**

Taula 4. D – 2A

- <u>Problema de canvi – disminució quan el canvi és desconegut</u>

D'entrada, si analitzem el grau de comprensió dels infants, observem que succeeix el mateix que el problema anterior (2A). Així doncs 8 (**Èr, Ge, Jo, Ai, Ca, Sa, Se** i **Jú**) dels 10 alumnes entenen què els demana l'enunciat. Mentre que 2 (**Ha** i **Ye**) no ho fan.

A continuació, si ens fixem en les estratègies, ens adonem que la meitat dels alumnes utilitzen procediments concrets i que tots ells arriben a un resultat correcte i que l'altra meitat es situen dins la matemàtica formal i arriben a una solució incorrecta.

Concretament, els 5 infants (**Ai, Ca, Sa, Se** i **Jú**) que utilitzen objectes com a suport utilitzen l'estratègia de separar-los (*Separating to*) i, tal i com hem dit, obtenen la solució correcta. Els altres 5 resolen el problema mentalment, 3 d'ells (**Èr, Jo** i **Ye**) amb suport escrit i els altres 2 (**Ge** i **Ha**) sense cap suport. A excepció d'en **Ha** que fa servir l'estratègia de fer dobles, els altres 4 (**Èr, Ge, Jo** i **Ye**) usen la de descompondre segons el valor de posició de les xifres. Tal i com esmentat en els dos últims problemes, aquesta estratègia no és apropiada quan la xifra de les unitats del subtrahend és més gran que la xifra de les unitats del minuend, sense fer servir nombres negatius. És per això, que l'**Èr**, en **Ge** i en **Jo** no obtenen una solució correcta.

És diferent el cas d'en **Ha** i en **Ye** que ja des de l'inici els manca la comprensió i entenen l'operació a resoldre com a suma i no com la que es demanava, una resta.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
Con. Informal	Separ.*	Obj					x	x	x	x		x			**5**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP	x		x									x	**3**
		DNP													**0**
		SCE													**0**
	Mentalment	DVP		x											**1**
		Dobles									x				**1**
		DNP													**0**

Taula 5. D – 2B

- <u>Problema de canvi – disminució quan l’inici és desconegut</u>

Per una banda, en relació a la comprensió, s’observa que només la meitat dels infants (**Jo, Ca, Sa, Se** i **Jú**) comprenen què els demana l’enunciat. Per tant, els altres 5 (**Èr, Ge, Ai, Ha** i **Ye**) no l’entenen. Igual que passava en el problema de canvi- augment quan la incògnita es situava a l’inici el grup d’alumnes que no comprenen el problema és molt elevat. És per això que aquest tipus també es va decidir treballar-lo específicament.

Per altra banda, si parem atenció en les estratègies, el primer que crida l’atenció és que la meitat dels alumnes (**Èr, Ge, Ai, Ha** i **Ye**) no utilitzen cap estratègia. Això és conseqüència de la manca de comprensió inicial de l’enunciat. Al no entendre el problema, ja no utilitzen cap estratègia ni produeixen cap solució.

Dels altres 5, 3 (**Sa, Se** i **Jú**) utilitzen procediments concrets i els 2 últims (**Jo** i **Ca**) s’engloben dins la matemàtica formal. Els tres primers utilitzen l’estratègia d’unir-los tots (*Joining all*) amb el suport d’objectes concrets. D’aquests, la **Sa** i en **Se** van obtenir la solució correcta, mentre que la **Jú** és va descomptar en el moment de comptar els objectes. Els segons (**Jo** i **Ca**) utilitzen una estratègia mental. La **Ca** utilitza la de descompondre segons el valor de posició de les xifres i opera fent servir el suport escrit. En **Jo** n’utilitza dues: la de descompondre i la de fer dues; i ho fa sense cap tipus de suport.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
		S/R	x	x			x				x			x	**5**
Con. Informal	Unir	Obj							x	x		x			**3**
	Separ.	Obj													**0**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP						x							**1**
		DNP													**0**
	Mentalment	DVP			x										**1**
		Deus			x										**1**
		Dobles													**0**

Taula 6. D – 2C

4.2.3 Problemes d’esquema parts – total

En aquest apartat s’analitzaran les taules de resultats obtingudes a partir dels dos problemes d’esquema parts – total inclosos en la primera prova. En primer terme, s’exposaran les dades recollides quan el total és desconegut i a continuació quan una part és desconeguda.

- Problema d’esquema parts-total quan el total és desconegut

A primer cop d’ull observem que la totalitat dels infants avaluats compren què demana el problema, igual que passava en la categoria de canvi-augment quan el resultat era desconegut.

Pel que fa a les estratègies, cal dir que tots els infants se situen dins de la matemàtica formal i que a excepció d’en **Jo** que fa ús dels dobles, tots els altres utilitzen la descomposició segons el valor de posició de les xifres. Concretament, la **Sa**, en **Ha**, la **Jú** i en **Ye** resolen l’operació mentalment amb suport escrit; i l’**Èr**, en **Ge**, l’**Ai** i la **Ca** ho fan sense cap tipus de suport.

Tots els infants utilitzen una estratègia adequada però només 8 arriben a la solució correcta. De nou, igual que en la categoria de canvi-augment quan el resultat era desconegut, en **Ha** i en **Ye** s’equivoquen a l’hora de realitzar el càlcul i obtenen un resultat incorrecte. La diferència és que en el primer cas es descompten en el moment de comptar els objectes i que en aquest problema l’error prové directament del càlcul escrit.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
Con. Informal	Unir	Obj													**0**
	Separ.	Obj													**0**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP							x		x	x		x	**4**
		Comp													**0**
	Mentalment	DVP	x	x			x	x		x					**5**
		Dobles			x										**0**

Taula 7. D – 3A

- <u>Problema d'esquema parts-total quan una part és desconeguda</u>

Igual que passava en dos problemes anteriors: canvi – augment i canvi – disminució quan l'inici és desconegut; si parem atenció en el grau de comprensió dels infants, observem que només la meitat d'aquests l'entenen. En concret els infants amb una bona comprensió són 5 (**Èr, Ge, Jo, Ca** i **Se**). Els altres 5 alumnes (**Ai, Sa, Ha, Jú** i **Ye**) no entenen què demana l'enunciat. És per això que aquesta tipologia de problemes és la última de les seleccionades per treballar-la durant la intervenció pràctica.

En relació a les estratègies, la taula ens permet observar que hi ha dos infants (**Ha** i **Ye**) que no fan servir cap estratègia ni donen cap resultat, com a conseqüència d'una falta de comprensió. Dins el coneixement formal trobem a un sol alumne, en **Se**, el qual utilitza l'estratègia de separar-los (*Separating from*). A través de la modelització amb objectes en **Se** aconsegueix un resultat correcte.

La resta d'alumnes, en concret 7 (**Èr, Ge, Jo, Ai , Ca, Sa** i **Jú**), s'emmarquen dins la matemàtica formal i resolen el problema mentalment. Per una banda, 5 infants (**Èr, Ai, Ca, Sa** i **Jú**) fan servir el suport escrit i tots ells utilitzen la mateixa estratègia: descompondre segons el valor de posició de les xifres. En aquest cas cal diferenciar entre els 2 infants: l'**Èr** i la **Ca**, que comprenen el problema, utilitzen aquesta estratègia i no arriben a un resultat correcte; dels 3 (**Ai, Sa** i **Jú**) que des de l'inici no comprenen el problema i uneixen les quantitats en comptes d'extreure-les.

L'**Èr** i la **Ca** s'equivoquen perquè, tal i com hem argumentat anteriorment, aquesta estratègia no és vàlida quan la xifra de les unitats del subtrahend és més gran que la xifra de les unitats del minuend, sense fer servir nombres negatius. En canvi, l'**Ai**, la **Sa** i la **Jú** s'equivoquen a l'hora d'entendre què demana l'enunciat.

Per altra banda, els 2 infants restants (**Ge** i **Jo**) resolen el problema mentalment sense cap suport. En **Ge** fa servir l'estratègia de descompondre segons el valor de posició de les xifres i no arriba a la solució correcta pel mateix motiu que hem exposat en el paràgraf anterior. Igual que en el problema de canvi-augment, quan l'inici és desconegut, en **Jo** és l'únic que utilitza l'estratègia de fer dobles i obté la solució correcta.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	**TOTAL**
		S/R									x			x	**2**
Con. Informal	Unir	Obj													**0**
	Separ.	Obj								x					**1**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP	x				x	x	x			x			**5**
		DNP													**0**
	Mentalment	DVP		x											**1**
		Dobles			x										**1**
		DNP													**0**

Taula 8. D – 3B

4.3 Resultats de la prova d’abril

Després d’analitzar els resultats recollits en la primera prova, a continuació s’exposaran els obtinguts en la segona prova passada durant el mes d’abril. Per presentar els resultats es farà servir el mateix ordre que s’ha seguit en l’apartat anterior. Es començarà amb la categoria de canvi-augment, es continuarà amb la de canvi-disminució i per últim s’inclourà la d’esquema parts-total. De la mateixa manera, dins de cada categoria es desglossaran els tipus de problema corresponents.

Igual que en la primera prova, per cada tipologia de problema es durà a terme una doble anàlisi. Per una banda es descriuran els aspectes lligats a la comprensió i, per altra banda, es detallaran les estratègies observades durant el procés de resolució.

4.3.1 Problemes de canvi – augment

En aquest apartat s’analitzaran les taules de resultats obtingudes a partir dels tres problemes de canvi – augment inclosos en la segona prova. En primer lloc, s’exposaran les dades recollides quan el resultat és desconegut, a continuació quan el canvi és desconegut i, finalment, quan l’inici és desconegut.

- <u>Problema de canvi – augment quan el resultat és desconegut</u>

Pel que fa a la comprensió, en la taula es pot observar que la totalitat dels infants entén el problema, utilitza una estratègia adequada per resoldre'l i arriba a un resultat correcte.

En relació a les estratègies, 3 infants (**Ca, Sa** i **Ha**) se situen en el nivell de coneixement informal i utilitzen l'estratègia d'unir-los tots (*Joining all*) al utilitzar objectes concrets. Un sol alumne (**Ye**) utilitza tan procediments concrets com mentals, fa ús de l'estratègia d'unir-los tots (*Joining all*) al ajudar-se dels dits i també la descompondre segons el valor de posició de les xifres.

La resta d'infants, concretament 6, resolt l'operació mentalment. Per una banda, l'**Èr,** en **Ge,** en **Jo,** l'**Ai** i en **Se** ho fan sense cap tipus de suport i mitjançant les estratègies de descompondre segons el valor de posició de les xifres i de fer deus. Per últim, la **Jú** el resol utilitzant el suport escrit i utilitza l'estratègia de compensar.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
Con. Informal	Unir-los tots	Dits												x	**1**
		Obj						x	x		x				**3**
Mat. Formal	Mentalment amb se	DVP													**0**
		Deus													**0**
		Comp										x			**1**
	Mentalment	DVP	x	x	x		x			x				x	**6**
		Deus	x	x	x		x			x					**5**

Taula 9. A – 1A

- <u>Problema de canvi – augment quan el canvi és desconegut</u>

Per començar, si ens fixem en els aspectes relacionats amb la comprensió, podem observar que 7 infants (**Èr, Ge, Jo, Ai, Ca, Se** i **Ha**) entenen què demana l'enunciat i els altres 3 (**Sa, Jú** i **Ye**) no ho fan.

Pel que fa a les estratègies, en **Ha** comprèn el problema però no troba cap estratègia per traslladar la situació plantejada per l'enunciat. És per aquest motiu que no n'utilitza cap i en conseqüència no dóna cap resposta. En **Se**, la **Jú** i en **Ye** es situen dins el coneixement informal i utilitzen la modelització d'objectes. En **Se** utilitza la d'unir-los tots (*Joining to*) i arriba al resultat correcte. En canvi, la **Jú** i en **Ye** fan servir la d'unir-los tots (*Joining all*) i obtenen una solució incorrecta, com a conseqüència d'una manca de comprensió.

Els altres 6 ho fan mentalment i s'inclouen dins la matemàtica formal. Per una banda, l'**Èr** i la **Ai**, fan servir el suport escrit i tots dos utilitzen l'estratègia de descompondre segons el valor de posició, en aquest cas vàlida ja que la xifra de les unitats del minuend és més gran que la xifra de les unitats del subtrahend.

Per altra banda, en **Ge**, en **Jo** i la **Sa** resolen l'operació mentalment, sense cap tipus de suport i utilitzen l'estratègia de descompondre segons el valor de posició de les xifres, correcta en aquest cas tal i com he explicat en el paràgraf anterior. Tot i això, cal assenyalar que en **Ge** i en **Jo** arriben al resultat correcte de la resta, mentre que la **Sa** no l'obté com a conseqüència d'una manca de comprensió de l'enunciat.

Per últim, la **Ca** també resol el problema mentalment sense cap suport i fa servir dues estratègies busca nombres de referència i descompon en nombres més petits.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
		S/R									x				**1**
Con. Informal	Unir	Obj										x		x	**2**
	Unir-los tots*	Dits													**0**
		Obj								x					**1**
Mat. Formal	MSE	DVP	x				x								**2**
	Mentalment	DVP		x	x				x						**3**
		Dobles													**0**
		NR						x							**1**
		DNP						x							**1**

Taula 10. A – 1B

- <u>Problema de canvi – augment quan l'inici és desconegut</u>

Per una banda, en relació a la comprensió, observem que la majoria d'alumnes l'entén. En concret 8 alumnes (**Èr, Ge, Jo, Ai, Ca, Sa, Se** i **Ha**) comprenen què demana l'enunciat i només 2 (**Jú** i **Ye**) no ho fan. Cal subratllar que aquesta tipologia de problemes es va treballar específicament durant la intervenció.

Per altra banda, pel que fa a les estratègies, en la taula s'observa que 3 alumnes (**Sa, Jú** i **Ye**) es situen en el nivell de coneixement informal i utilitzen estratègies de modelització amb objectes. La **Sa** fa servir l'estratègia de separar-los (*Separating from*) i obté la solució correcta. En canvi, la **Jú** i en **Ye** els manca la comprensió i l'entenen com a unió. Per aquest motiu, utilitzen l'estratègia d'unir-los tots (*Joining all*) i, en conseqüència, arriben a un resultat incorrecte.

Els 7 infants restants (**Èr, Ge, Jo, Ai, Ca, Se** i **Ha**) s'emmarquen dins la matemàtica informal i resolen l'operació mentalment, amb o sense suport escrit. L'**Er**, l'**Ai** i en **Ha** s'ajuden del suport escrit. Tots tres utilitzen l'estratègia de descompondre en nombres més petits i arriben a la solució correcta. En **Ge**, en **Jo**, la **Ca** i en **Se** no utilitzen cap tipus de suport i fan servir diferents estratègies no totes vàlides.

En concret en **Ge** utilitza l'estratègia de descompondre segons el valor de posició de les xifres i obté un resultat incorrecte. Tal i com ja hem esmentat en diverses ocasions, aquesta no és adequada quan la xifra de les unitats del subtrahend és més gran que la xifra de les unitats del minuend, sense fer servir nombres negatius.

Per últim, en **Jo** utilitza l'estratègia de fer dobles, la **Ca** la de sumar cap endavant i en **Se** la de descompondre en nombres més petits. Totes tres són vàlides i els serveixen per arribar a la solució correcta.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
		S/R													**0**
Con. Informal	Unir	Obj										x		x	**2**
	Unir*	Obj													**0**
	Separ.	Obj							x						**1**
Mat. Formal	MSE	DVP													**0**
		DNP	x				x				x				**3**
	Mentalment	DVP		x											**1**
		Dobles			x										**1**
		DNP								x					**1**
		SCE						x							**1**

Taula 11. A – 1C

4.3.2 Problemes de canvi – disminució

En aquest apartat s'analitzaran les taules de resultats obtingudes a partir dels tres problemes de canvi – disminució inclosos en la segona prova. Primerament, s'exposaran les dades recollides quan el resultat és desconegut, a continuació quan el canvi és desconegut i, per acabar, quan l'inici és desconegut.

- Problema de canvi – disminució quan el resultat és desconegut

Si ens centrem en el grau de comprensió, en la taula s'observa fàcilment que la majoria dels infants, concretament 8 (**Èr, Ge, Jo, Ai, Ca, Se, Ha** i **Ye**) comprenen què demana el problema. Mentre que 2 alumnes (**Sa** i **Jú**) no ho fan.

Pel que fa a l'ús d'estratègies, 2 alumnes (**Sa** i **Ye**) s'emmarquen dins el coneixement informal fent ús de la modelització amb objectes. La diferència entre ells és el que la **Sa** utilitza l'estratègia d'unir-los tots (*Joining all*) com a conseqüència d'una manca de comprensió i arriba a un resultat incorrecte. En canvi, en **Ye** utilitza una estratègia adequada: la de separar-los (*Separating from*); i obté la solució correcta.

Els altres 8 (**Èr, Ge, Jo, Ai, Ca, Se, Ha** i **Jú**) se situen dins de la matemàtica formal i obtenen un resultat correcte, menys la **Jú.** Aquesta alumna no comprèn l'enunciat i utilitza l'estratègia de descompondre segons el valor de posició de les xifres amb l'ajuda del suport escrit per unir les quantitats en comptes de separar-les. En conseqüència no arriba a un bon resultat.

Els alumnes restants: l'**Èr**, en **Ge**, en **Se** i en **Ha;** s'ajuden del suport escrit i fan servir l'estratègia de descompondre en nombres més petits. L'**Ai** també fa servir la de descompondre però a més a més n'utilitza una altra: la de sumar cap endavant. Aquesta última també la fa servir la **Ca.**

Per últim, assenyalar que en **Jo** és l'únic alumne que resol l'operació mentalment sense cap tipus de suport. Utilitza l'estratègia de descompondre en nombres més petits i també obté una solució correcta.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
Con. Informal	Unir	Obj							x						**1**
	Separ.	Obj												x	**1**
Mat. Formal	Mentalment amb SE	DVP										x			**1**
		DNP	x	x			x			x	x				**5**
		SCE					x	x							**2**
	Mentalment	DVP													**0**
		DNP			x										**1**

Taula 12. A – 2A

- <u>Problema de canvi – disminució quan el canvi és desconegut</u>

D'entrada, si analitzem el grau de comprensió dels infants, observem que la totalitat dels alumnes entén què demana l'enunciat, utilitza una estratègia adequada per resoldre'l i arriba a un resultat correcte.

A continuació, si ens fixem en les estratègies utilitzades durant el procés de resolució, distingim que 3 alumnes (**Sa, Jú** i **Ye**) fan servir l'estratègia de separar-los (*Separating to*), situada dins el tipus de coneixement informal. Tots ells usen la modelització amb objectes per resoldre l'operació.

Els 7 alumnes restants s'emmarquen dins de la matemàtica formal i resolen l'operació mentalment. En concret, 5 d'ells (**Èr, Ai, Ca, Se** i **Ha**) ho fa amb suport escrit i els altres dos (**Ge** i **Jo**) sense suport. L'**Èr**, l'**Ai**, en **Se** i en **Ha** utilitzen la mateixa estratègia: descompondre en nombres més petits. I la **Ca** fa servir la de sumar cap endavant.

Per la seva banda, en **Ge** empra l'estratègia de descompondre segons el valor de posició de les xifres. En aquest cas concret, en **Ge** arriba a la solució correcta encara que la xifra de les unitats del subtrahend sigui més gran que la xifra de les unitats del minuend, perquè té en compte els nombres negatius. Per últim, en **Jo** fa servir l'estratègia de descompondre en nombres més petits.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
Con. Informal	Separ.*	Obj							x			x		x	**3**
Mat. Formal	Mentalment amb SE	DVP													**0**
		DNP	x				x			x	X				**4**
		SCE						x							**1**
	Mentalment	DVP		x											**1**
		Dobles													**0**
		DNP			x										**1**

Taula 13. A – 2B

- <u>Problema de canvi – disminució quan l'inici és desconegut</u>

En relació a la comprensió, s'observa que la majoria dels infants comprenen què demana l'enunciat. En concret 8 alumnes (**Èr, Jo, Ai, Ca, Se, Ha, Jú** i **Ye**) l'entenen, mentre que 2 (**Ge** i **Sa**) no ho fan. Tots els alumnes amb bona comprensió arriben a una solució correcta. Cal subratllar que aquesta tipologia de problemes es va treballar específicament durant la intervenció.

Si parem atenció en les estratègies, trobem a un sol infant (**Ge**) que no utilitza cap estratègia ni dóna cap resposta com a conseqüència d'una manca de comprensió.

Una altra alumna, l'**Ai**, se situa en el nivell de coneixement informal, utilitza l'estratègia d'unir-los tots (*Joining all*) i obté la solució correcta. Una tercera alumna, la **Sa**, utilitza dues estratègies: separar-los tots (*Separating from*) i la de descompondre en nombres més petits amb el suport escrit. Tot i això, arriba un resultat incorrecte com a conseqüència d'una falta de comprensió. El motiu d'aquest error és que entén l'enunciat com a quantitats a separar i no com a quantitats a unir.

Els altres 7 alumnes s'emmarquen dins la matemàtica formal i resolen l'operació mentalment, 2 amb suport escrit i 5 sense suport. En concret, en **Ha** i en **Ye** utilitzen el suport escrit i tots dos fan servir l'estratègia de descompondre segons el valor de posició de les xifres.

Els altres 5 no fan servir cap suport i tots utilitzen l'estratègia de descompondre segons el valor de posició de les xifres amb algunes variacions. En primer lloc, l'**Èr**, la **Ca** i en **Se** empren dues estratègies la de descompondre i la de fer deus. En **Jo** també n'utilitza dues, la de descompondre i la de fer dobles. Per últim, la **Jú** només utilitza la de descompondre.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
		S/R		x											**1**
Con. Informal	Unir	Obj					x								**1**
	Separ.	Obj							x						**1**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP									x			x	**2**
		DNP							x						**1**
	Mentalment	DVP	x		x			x		X		x			**5**
		Deus	x					x		X					**3**
		Dobles			x										**1**

Taula 14. A – 2C

4.3.3 Problemes d’esquema parts – total

En aquest apartat s’analitzaran les taules de resultats obtingudes a partir dels dos problemes d’esquema parts – total inclosos en la segona prova. En primer terme, s’exposaran les dades recollides quan el total és desconegut i a continuació quan una part és desconeguda.

- Problema d’esquema parts-total quan el total és desconegut

A primer cop d’ull observem que pràcticament la totalitat dels infants avaluats comprèn què demana el problema, utilitza una estratègia adequada i arriba a la solució correcta. Concretament tots els alumnes l’entenen excepte la **Jú**.

Pel que fa a les estratègies, tots els infants es situen dins de la matemàtica formal excepte la **Jú,** que s’emmarca dins el nivell de coneixement informal. Aquesta alumna fa servir l’estratègia d’unir-los tots (*Joining all*) i conseqüentment arriba a un resultat incorrecte, degut a una manca de comprensió de l’enunciat.

Tal i com hem dit, la resta d’infants resolen el problema mentalment, 2 d’ells (**Sa** i **Ye**) s’ajuden del suport escrit i els altres 7 (**Èr, Ge, Jo, Ai, Ca, Se** i **Ha**) ho fan sense suport. En relació al procés de resolució és curiós, ja que pràcticament tots utilitzen la mateixa estratègia: descompondre segons el valor de posició de les xifres. La única que empra una estratègia diferent és la **Sa,** que utilitza la de compensar.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
Con. Informal	Unir	Obj										x			**1**
	Separ.	Obj													**0**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP												x	**1**
		Comp							x						**1**
	Mentalment	DVP	x	x	x		x	x		x	x				**7**
		Dobles													**0**

Taula 15. A – 3A

- <u>Problema d’esquema parts-total quan una part és desconeguda</u>

Per començar, si parem atenció en el grau de comprensió dels infants, observem que una mica més de la meitat entenen el problema. En concret els infants amb una bona comprensió són 6 (**Èr, Ge, Jo, Ai, Ca** i **Se**), mentre que 4 (**Sa, Ha, Jú** i **Ye**) no la tenen.

En relació a les estratègies, la taula ens permet observar que un únic infant, en **Ye**, es situa dins el nivell de coneixement informal i utilitza l’estratègia d’unir-los tots (*Joining all*). Aquest alumne no arriba a una solució correcta com a conseqüència d’una manca de comprensió.

La resta d’alumnes (**Èr, Ge, Jo, Ai, Ca, Sa, Se, Ha** i **Jú**) s’emmarquen dins la matemàtica formal i resolen el problema mentalment. Per una banda, 4 infants (**Ge, Ai, Ca** i **Sa**) fan servir el suport escrit. D’aquests, en **Ge**, l’**Ai** i la **Ca** utilitzen la mateixa estratègia: descompondre en nombres més petits; i obtenen la solució correcta. En canvi, la **Sa** utilitza l’estratègia de descompondre segons el valor de posició per afegir les quantitats en comptes d’extreure-les. Així doncs, el seu error és degut a una falta de comprensió.

Per altra banda, els 5 infants restants (**Èr**,**Jo, Se, Ha i Jú**) resolen el problema mentalment sense cap suport. D’aquests, l’**Èr** i en **Jo** fan servir la mateixa estratègia: descompondre en nombres més petits. En **Se**, en **Ha** i la **Jú** també utilitzen una estratègia comuna: descompondre segons el valor de posició de les xifres; però únicament en **Se** arriba al resultat correcte. El motiu d’això és la manca de comprensió inicial d’en **Ha** i de la **Jú**. Tots dos uneixen les quantitats en comptes d’extreure-les i, conseqüentment, arriben a un resultat incorrecte.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	**TOTAL**
		S/R													**0**
Con. Informal	Unir	Obj												x	**1**
	Separ.	Obj													**0**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP							x						**1**
		DNP		x			x	x							**3**
	Mentalment	DVP								x	x	x			**3**
		Dobles													**0**
		DNP	x		x										**2**

Taula 16. A – 3B

4.4 Comparació dels resultats de les dues proves

Si bé en els apartats anteriors s'han descrit els resultats obtinguts en la prova de desembre i en la d'abril, ara és el moment de relacionar-los. Per tal de facilitar aquesta comparació, es va elaborar una graella que recull les millores dels alumnes, en relació a la comprensió i al resultat. (*vegeu l'annex 10*)

Per comparar els resultats, començarem amb els tres tipus de problema de la categoria de canvi-augment, continuarem amb els tres de la categoria de canvi-disminució i acabarem amb els dos de la categoria d'esquema parts-total.

Igual que s'ha fet fins ara, per cada tipologia de problema es durà a terme una doble comparació. Per una banda es confrontaran els aspectes lligats a la comprensió i, per altra banda, es contraposaran les estratègies observades durant el procés de resolució en cada una de les proves.

4.4.1 Problemes de canvi – augment

En aquest apartat es durà a terme una comparació dels tres tipus de problemes de canvi – augment. En primer lloc, es compararan els resultats obtinguts quan el resultat és desconegut, a continuació quan el canvi és desconegut i, finalment, quan l'inici és desconegut.

- Problema de canvi – augment quan el resultat és desconegut

En relació a la comprensió, no hi ha cap variació entre les dues proves ja que la totalitat dels infants entén què demana l'enunciat, tan al desembre com a l'abril.

Pel que fa a les estratègies, observem que a l'abril incrementa lleugerament el grup d'alumnes que es situen dins la matemàtica formal, fent servir estratègies mentals per resoldre el problema. És el cas d'en **Se** que al desembre utilitza l'estratègia d'unir-los tots (*Joining all*) i, en canvi, a l'abril descompon mentalment segons el valor de posició de les xifres.

Tot i això, cal esmentar que alguns alumnes fan servir procediments concrets en totes dues proves perquè se senten segurs modelant objectes. En aquest grup trobaríem a la **Ca**, a la **Sa** i a en **Ha** que utilitzen l'estratègia d'unir-los tots (*Joining all*).

També, distingim que hi ha més alumnes que utilitzen la mateixa estratègia en les dues proves que no pas infants que canvien o n'utilitzen alguna més. Concretament, 6 alumnes (**Èr, Se, Ai, Ca, Sa** i **Ha**) fan servir el mateix procediment tan al desembre com a l'abril i 4 no (**Jo, Se, Jú** i **Ye**).

És interessant subratllar un cas concret: el de la **Jú**. Aquesta alumna en totes dues proves resol l'operació amb l'ajuda del suport escrit però mentre que al desembre utilitza l'estratègia de descompondre i la de fer deus, a l'abril utilitza la de compensar.

Per últim, cal assenyalar que mentre que al desembre només 8 dels 10 infants van arribar al resultat correcte com a conseqüència d'un error alhora de comptar els objectes, a l'abril tots els alumnes obtenen la solució correcta.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
Con. Informal	Unir-los tots	Dits													0
		Obj						x	x	x	x			x	5
Mat. Formal	Mentalment amb se	DVP										x			1
		Deus										x			1
		Comp													0
	Mentalment	DVP	x	x	x		x								4
		Deus	x	x			x								3

Taula 1. D – 1A

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
Con. Informal	Unir-los tots	Dits												x	**1**
		Obj						x	x		x				**3**
Mat. Formal	Mentalment amb se	DVP													**0**
		Deus													**0**
		Comp										x			**1**
	Mentalment	DVP	x	x	x		x			x				x	**6**
		Deus	x	x	x		x			x					**5**

Taula 9. A – 1A

- <u>Problema de canvi – augment quan el canvi és desconegut</u>

Per començar, si ens fixem en els aspectes relacionats amb la comprensió, s'observa que hi ha un lleu declini en els infants que entenen el problema. En concret, al mes de desembre van ser 8 i al mes d'abril van disminuir a 7.

Tot i això, és important assenyalar que aquests alumnes amb una falta de comprensió no es corresponen íntegrament en les dues proves. En la primera prova els infants que no van entendre què demanava l'enunciat són en **Ha** i en **Ye**. En la segona prova l'únic alumne que torna a aparèixer és en **Ye** i tampoc el comprenen la **Sa** i la **Jú**. La resta d'alumnes: l'**Èr,** en **Ge,** en **Jo,** l'**Ai,** la **Ca i** en **Se** l'entenen en totes dues proves.

Pel que fa a les estratègies, es percep un lleu increment dels alumnes que utilitzen estratègies formals al mes d'abril. L'únic cas és el de la **Sa** però cal subratllar que aquest canvi està lligat a una falta de comprensió. Concretament, en la primera prova utilitza l'estratègia d'unir-los tots (*Joining to*) i en la segona fa servir la de descompondre segons el valor de posició però uneix les quantitats en comptes d'extreure-les.

Les taules també permeten observar que la meitat d'infants (**Èr**, **Ge**, **Ca, Se** i **Ha)** utilitzen la mateixa estratègia tan al desembre com a l'abril. Per exemple, en **Ge** i l'**Èr** descomponen segons el valor de posició de les xifres, la **Ca** busca nombres de referència i en **Se** utilitza l'estratègia d'unir-los tots (*Joining to*).

Els altres 5 infants (**Jo, Ai, Sa, Jú** i **Ye**) utilitzen una estratègia diferent en cada prova. És el cas d'en **Jo** i l'**Ai** que al desembre resolen l'operació mentalment usant l'estratègia de fer dobles i, en canvi, a l'abril tots dos fan servir la de descompondre segons el valor de posició de les xifres.

Per últim, destaca el cas de la **Jú** que al desembre entén l'enunciat i fa servir l'estratègia d'unir-los tots (*Joining to*). I, en canvi, a l'abril per falta de comprensió, utilitza l'estratègia d'unir-los tots (*Joining all*) per sumar els nombres en comptes de restar-los.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
		S/R									x			x	**2**
Con. Informal	Unir	Obj													**0**
Con. Informal	Unir-los*	Dits								x					**1**
Con. Informal	Unir-los*	Obj							x			x			**2**
Mat. Formal	MSE	DVP													**0**
Mat. Formal	Mentalment	DVP	x	x											**2**
Mat. Formal	Mentalment	Dobles			x		x								**2**
Mat. Formal	Mentalment	NR						x							**1**
Mat. Formal	Mentalment	DNP													**0**

Taula 2. D – 1B

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
		S/R									x				**1**
Con. Informal	Unir	Obj										x		x	**2**
Con. Informal	Unir-los*	Dits													**0**
Con. Informal	Unir-los*	Obj								x					**1**
Mat. Formal	MSE	DVP	x				x								**2**
Mat. Formal	Mentalment	DVP		x	x				x						**3**
Mat. Formal	Mentalment	Dobles													**0**
Mat. Formal	Mentalment	NR						x							**1**
Mat. Formal	Mentalment	DNP						x							**1**

Taula 10. A – 1B

- Problema de canvi – augment quan l'inici és desconegut

Pel que fa a la comprensió, el primer que crida l'atenció és l'augment significatiu dels infants que entenen el problema al mes d'abril. En les taules es pot observar que al mes de desembre només 4 alumnes (**Èr, Jo, Ca** i **Se**) entenien què demanava l'enunciat, en canvi, al mes d'abril el nombre d'alumnes es duplica. Així doncs la quantitat d'infants amb bona comprensió incrementa fins a 8 (**Èr, Ge, Jo, Ai, Ca, Sa, Se** i **Ha**). Cal subratllar que només a dos alumnes (**Jú** i **Ye**) els manca la comprensió en totes dues proves.

En relació a les estratègies i en bona part lligat a la comprensió, també distingim un bon increment d'alumnes que s'emmarquen dins la matemàtica formal. És el cas d'en **Se** o d'en **Ha**. En **Se** al desembre es situa en el nivell de coneixement informal al utilitzar l'estratègia d'unir-los tots (*Joining to*) i a l'abril s'emmarca dins la matemàtica formal al descompondre en nombres més petits, ho fa mentalment i sense cap suport.

Més extrem és el cas d'en **Ha** que en la primera prova no utilitza cap estratègia ni dóna cap resultat, per falta de comprensió. I, en canvi, en la segona prova entén què demana l'enunciat i també s'emmarca dins la matemàtica formal al fer servir l'estratègia de descompondre en nombres més petits amb l'ajuda del suport escrit.

Cal assenyalar que en aquest problema, en **Jo** és l'únic que utilitza la mateixa estratègia: fer dobles; tan al desembre com a l'abril. La resta d'infants en fa servir una de diferent. Com a exemple, podrien ser l'**Èr**, l'**Ai** i la **Ca** que al mes de desembre descomponen segons el valor de posició de les xifres. Tots tres resolen el problema mentalment, l'**Èr** sense suport i l'**Ai** i la **Ca** amb suport escrit; però cap arriba a la solució correcta per diferents motius. En canvi, a l'abril l'**Èr** i l'**Ai** utilitzen l'estratègia de descompondre en nombres més petits i la **Ca** la de sumar cap endavant. Per vies diferents tots tres arriben al resultat correcte.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
		S/R		x					x		x			x	**4**
Con. Informal	Unir	Obj													**0**
	Unir*	Obj								x					**1**
	Separ.	Obj													**0**
Mat. Formal	MSE	DVP					x	x				x			**3**
		DNP													**0**
	Mentalment	DVP	x												**1**
		Dobles			x										**1**
		DNP													**0**
		SCE													**0**

Taula 3.D – 1C

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
		S/R													**0**
Con. Informal	Unir	Obj										x		x	**2**
	Unir*	Obj													**0**
	Separ.	Obj							x						**1**
Mat. Formal	MSE	DVP													**0**
		DNP	x				x				x				**3**
	Mentalment	DVP		x											**1**
		Dobles			x										**1**
		DNP								x					**1**
		SCE						x							**1**

Taula 11.A – 1C

4.4.2 Problemes de canvi – disminució

En aquest apartat es durà a terme una comparació dels tres tipus de problemes de canvi – disminució. Primerament, es compararan els resultats obtinguts quan el resultat és desconegut, a continuació quan el canvi és desconegut i, per acabar, quan l'inici és desconegut.

- Problema de canvi – disminució quan el resultat és desconegut

Si ens centrem en el grau de comprensió, observem que en totes dues proves la majoria dels infants entenen què demana l'enunciat. En concret, tan al desembre com a l'abril hi ha 8 alumnes que tenen una bona comprensió i 2 que no. Igual que passava en el problema de canvi – augment quan el canvi és desconegut, aquests infants no es corresponen íntegrament en les dues proves. Si bé al desembre eren l'**Ai** i en **Ye** els infants als quals els mancava la comprensió, a l'abril els falta a la **Sa** i a la **Jú**. La resta d'infants (**Èr, Ge, Jo, Ca, Se** i **Ha**) l'entenen en totes dues proves.

Pel que fa a l'ús d'estratègies, destaca que l'abril la majoria d'infants utilitzen estratègies formals. En concret, es passa de 4 a 6 alumnes. Però el que més crida l'atenció és que en la primera prova un grup d'infants utilitza procediments concrets i en canvi a l'abril resolen l'operació mentalment, amb o sense suport escrit.

Concretament és el cas d'en **Jo**, en **Ha** i la **Ca**. Al desembre, tots tres utilitzen l'estratègia de separar-los (*Separating from*). En canvi, a l'abril tots ells s'emmarquen dins la matemàtica formal i resolen el problema mentalment. En **Jo** i en **Ha** utilitzen l'estratègia de descompondre en nombres més petits i la **Ca** suma cap endavant.

Un altre aspecte a subratllar és que en aquest problema cap alumne utilitza la mateixa estratègia en les dues proves.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
Con. Informal	Unir	Obj					x								**1**
	Separ.	Obj			x			x	x		x	x			**5**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP								x				x	**2**
		DNP													**0**
		SCE													**0**
	Mentalment	DVP	x	x											**2**
		DNP													**0**

Taula 4.D – 2A

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
Con. Informal	Unir	Obj							x						**1**
	Separ.	Obj												x	**1**
Mat. Formal	Mentalment amb SE	DVP										x			**1**
		DNP	x	x			x			x	x				**5**
		SCE					x	x							**2**
	Mentalment	DVP													**0**
		DNP			x										**1**

Taula 12.D – 2A

- <u>Problema de canvi – disminució quan el canvi és desconegut</u>

D'entrada, si analitzem el grau de comprensió dels infants, observem que es produeix una millora entre les dues proves. Si bé al desembre només 8 alumnes entenen què demana l'enunciat, a l'abril aquesta quantitat incrementa fins a 10. Aquesta xifra es correspon amb la totalitat dels infants avaluats.

A continuació, si ens fixem en el tipus de coneixement lligat directament a les estratègies utilitzades, distingim que a l'abril incrementa el nombre d'alumnes que es situa dins el coneixement formal. És el cas de l'**Ai**, la **Ca** i en **Se** que en la primera prova se situen dins el nivell de coneixement formal fent ús d'una estratègia concreta: separar-los (*Separating to*). En canvi, a l'abril tots ells s'emmarquen dins la matemàtica formal i resolen l'operació mentalment amb suport escrit. L'**Ai** i en **Se** utilitzen l'estratègia de descompondre en nombres més petits i la **Ca** suma cap endavant. Ambdues estratègies els guien a la solució correcta.

Per últim, destacar que només 3 alumnes (**Ge, Sa** i **Jú**) que fan servir la mateixa estratègia en les dues proves. Per exemple, en **Ge** utilitza l'estratègia de descompondre segons el valor de posició de les xifres tan al desembre com a l'abril. Tot i això, només obté la solució correcta a l'abril perquè encara que la xifra de les unitats del subtrahend sigui més gran que la xifra de les unitats del minuend, té en compte els nombres negatius.

La resta d'alumnes utilitzen estratègies diferents al desembre i a l'abril. És el cas de l'**Èr** i en **Jo** que en la prova de desembre utilitzen l'estratègia de descompondre segons el valor de posició de les xifres, amb l'ajuda del suport escrit; i obtenen un resultat incorrecte. En canvi, a l'abril tots dos resolen l'operació mentalment i descomponen en nombres més petits.

Per acabar, un cas interessant és el d'en **Ha** que com a conseqüència d'una manca de comprensió, al desembre utilitza una estratègia incorrecta: fer dobles. En canvi, a l'abril entén què demana l'enunciat, fa servir l'estratègia de descompondre en nombres més petits, ajudant-se del suport escrit, i arriba al resultat correcte.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
Con. Informal	Separ*	Obj					x	x	x	x		x			**5**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP	x		x									x	**3**
		DNP													**0**
		SCE													**0**
	Mentalment	DVP		x											**1**
		Dobles									x				**1**
		DNP													**0**

Taula 5.D – 2B

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
Con. Informal	Separ*	Obj							x			x		x	**3**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP													**0**
		DNP	x				x			x	x				**4**
		SCE						x							**1**
	Mentalment	DVP		x											**1**
		Dobles													**0**
		DNP			x										**1**

Taula 13.A – 2B

- <u>Problema de canvi – disminució quan l'inici és desconegut</u>

En relació a la comprensió, s'observa que entre la prova de desembre i d'abril creix el nombre d'infants que entenen què demana l'enunciat. Mentre que en la primera prova només la meitats dels alumnes (**Jo, Ca, Sa, Se i Jú**) tenien una bona comprensió, en la segona la xifra puja a 8 infants (**Èr, Jo, Ai, Ca, Se, Ha, Jú i Ye**). És important assenyalar que només hi ha un alumne (**Ge**) al qual li falta la comprensió en les dues proves.

Si parem atenció en les estratègies, crida l'atenció que en la primera prova únicament dos infants (**Jo** i **Ca**) utilitzen estratègies formals i 3 fan ús d'informals (**Sa, Se** i **Jú**). En canvi, a l'abril el nombre d'alumnes que se situa dins la matemàtica formal s'incrementa fins a 7 i, a més a més, una altra alumna (**Sa**) utilitza tan els procediments concrets com el càlcul mental.

Tot i això, cal diferenciar entre el cas d'en **Se i** el de l'**Èr**. Per una banda, en **Se** al desembre es situa dins el nivell de coneixement informal i utilitza l'estratègia d'unir-los tots (*Joining all*). En canvi, a l'abril s'emmarca dins la matemàtica formal fent ús de les estratègies de descompondre segons el valor de posició de les xifres i de fer deus. Per tant, el canvi es degut a un avenç en el tipus de coneixement lligat a l'ensenyament d'estratègies formals.

Per altra banda, l'**Èr** al desembre no utilitza cap estratègia com a conseqüència d'una falta de comprensió. En canvi, a l'abril fa servir les estratègies de descompondre segons el valor de posició de les xifres i de fer deus, les fa servir mentalment i sense suport. Per tant, en aquest cas el canvi està lligat a entendre l'enunciat.

Per acabar, esmentar que cap alumne utilitza les mateixes estratègies en les dues proves. Només 2 infants (**Jo** i **Ca**) fan servir una estratègia igual en les dues proves però l'altra no. És a dir, en **Jo** al desembre utilitza les estratègies de descompondre segons el valor de posició de les xifres i de fer deus, en canvi, a l'abril també fa servir la de descompondre però en comptes de la de fer deus usa la de fer dobles.

La resta d'alumnes utilitzen estratègies diferents en les dues proves. Per exemple, la **Jú** en la primera prova utilitza l'estratègia d'unir-los tots (*Joining all*) i a l'abril la de descompondre segons el valor de posició de les xifres.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
		S/R	x	x			x				x			x	**5**
Con. Informal	Unir	Obj							x	x		x			**3**
	Separ.	Obj													**0**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP						x							**1**
		DNP													**0**
	Mentalment	DVP			x										**1**
		Deus			x										**1**
		Dobles													**0**

Taula 6.D – 2C

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
		S/R		x											**1**
Con. Informal	Unir	Obj					x								**1**
	Separ.	Obj							x						**1**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP									x			x	**2**
		DNP							x						**1**
	Mentalment	DVP	x		x			x		x		x			**5**
		Deus	x					x		x					**3**
		Dobles			x										**1**

Taula 14.A – 2C

4.4.3 Problemes d'esquema parts – total

En aquest apartat es durà a terme una comparació dels dos tipus de problemes d'esquema parts – total. En primer terme, es compararan els resultats obtinguts quan el total és desconegut i a continuació quan una part és desconeguda.

- Problema d'esquema parts-total quan el total és desconegut

Al comparar els aspectes lligats a la comprensió observem que hi ha una lleu disminució entre la prova de desembre i la d'abril. Mentre que en la primera tots els alumnes entenen què demana l'enunciat, en la d'abril ho segueixen fent tots, excepte una alumna (**Jú**).

Pel que fa al tipus de coneixement, les taules permeten identificar que no hi ha una variació significativa en aquest aspecte. Al desembre la totalitat dels infants es va situar dins la matemàtica formal i a l'abril també, excepte una alumna (**Jú**) com a conseqüència d'una manca de comprensió, utilitza el procediment concret d'unir-los tots (*Joining all*).

Si parem atenció en les estratègies, la majoria d'infants utilitza la mateixa a en les dues proves. En concret, l'**Èr**, en **Ge**, l'**Ai**, la **Ca,** en **Se** i en **Ye** fan servir exactament la mateixa estratègia i el mateix procediment tan al desembre com a l'abril. Tots ells utilitzen l'estratègia de descompondre segons el valor de posició de les xifres i es situen dins la matemàtica formal. Excepte en **Ye** que s'ajuda del suport escrit, la resta ho resolen mentalment sense cap tipus de suport.

Els dos únics alumnes que fan servir estratègies diferents són en **Jo** i la **Sa.** En **Jo** al desembre utilitza l'estratègia de fer dobles i a l'abril la de descompondre segons el valor de posició de les xifres. La **Sa** al desembre utilitza la de descompondre i a l'abril fa servir la de compensar.

Per últim, la **Jú** en la primera prova fa servir l'estratègia de descompondre amb l'ajuda del suport escrit i en la segona prova, com a conseqüència d'una falta de comprensió, utilitza l'estratègia d'unir-los tots (*Joining all*).

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
Con. Informal	Unir	Obj													**0**
	Separ.	Obj													**0**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP							x		x	x		x	**4**
		Comp													**0**
	Mentalment	DVP	x	x			x	x		x					**5**
		Dobles			x										**0**

Taula 7. D – 3A

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
Con. Informal	Unir	Obj										x			**1**
	Separ.	Obj													**0**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP												x	**1**
		Comp							x						**1**
	Mentalment	DVP	x	x	x		x	x		x	x				**7**
		Dobles													**0**

Taula 15. A – 3A

- Problema d’esquema parts-total quan una part és desconeguda

Per començar, si comparem en el grau de comprensió dels infants, observem que aquest incrementa lleugerament. Dels 5 infants (**Ai, Sa, Ha, Jú** i **Ye**) que no entenen l’enunciat al desembre, disminuïm a 4 (**Sa, Ha, Jú** i **Ye**) al mes d’abril.

Si comparem detingudament aquestes dades distingim que l’**Èr**, en **Ge**, en **Jo**, la **Ca** i en **Se** entenen el problema tan al desembre com a l’abril. L’**A**i és la única alumna que acaba entenen el problema a l’abril. A la resta d’alumnes que els manca la comprensió són els mateixos en les dues proves: la **Sa**, en **Ha**, la **Jú** i en **Ye**.

Si ens fixem en els aspectes relacionats amb el tipus de coneixement matemàtic distingim que són molt pocs aquells alumnes que fan servir procediments concrets per resoldre aquest problema. En concret, al desembre observem únicament a un alumne (**Se**) que s’ajuda de la modelització d’objectes. A l’abril aquesta dada és manté però l’alumne canvia, així doncs és en **Ye** l’únic que s’emmarca dins el nivell de coneixement informal.

En relació a les estratègies, les taules ens permeten distingir que tres alumnes (**Èr**, **Sa** i **Jú**) utilitzen la mateixa estratègia en les dues proves. Per exemple, l’**Èr** utilitza la de descompondre segons el valor de posició de les xifres, però només arriba a la solució correcta a l’abril. El motiu d’això és perquè a l’abril l’**Èr** té en compte els nombres negatius, encara que la xifra de les unitats del subtrahend sigui més gran que la xifra de les unitats del minuend, i, en canvi, al desembre no ho va tenir en consideració.

La resta d’infants empren una estratègia diferent en cada prova. Per exemple, en **Ge**, l’**Ai** i la **Ca** al mes de desembre també utilitzen la de descompondre, l’**Ai** i la **Ca** amb suport escrit i en **Ge** sense suport. Tots tres obtenen una solució incorrecta. En canvi, al mes d’abril, tots ells utilitzen l’estratègia de descompondre amb nombres més petits ajudant-se del suport escrit i arriben al resultat correcte.

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
		S/R									x			x	**2**
Con. Informal	Unir	Obj													**0**
	Separ.	Obj								x					**1**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP	x				x	x	x			x			**5**
		DNP													**0**
	Mentalment	DVP		x											**1**
		Dobles			x										**1**
		DNP													**0**

Taula 8. D – 3B

			Èr	Ge	Jo	Ya	Ai	Ca	Sa	Se	Ha	Jú	Ma	Ye	TOTAL
		S/R													**0**
Con. Informal	Unir	Obj												x	**1**
	Separ.	Obj													**0**
Mat. Formal	Mentament amb SE	DVP							x						**1**
		DNP		x			x	x							**3**
	Mentalment	DVP								x	x	x			**3**
		Dobles													**0**
		DNP	x		x										**2**

Taula 16. A – 3B

Com a síntesi d'aquest apartat s'ajunten dues taules que resumeixen aquells aspectes més rellevants per la recerca. En relació a la comprensió, es mostra el grau de millora assolit pels infants a l'hora de comprendre què demana el problema. S'han seleccionat els resultats obtinguts en els tres tipus de problema treballats durant la intervenció didàctica i són els següents:

	Prova de desembre		Prova d'abril		Comparació
Tipus de problema	**Bona Comp.**	**Falta Comp.**	**Bona Comp.**	**Falta Comp.**	**Alumnes que milloren**
Canvi-augment (inici desconegut)	4	6	8	2	4
Canvi-disminució (inici desconegut)	5	5	8	2	3
Esquema parts-total (part desconeguda)	5	5	6	4	1

Pel que fa a les estratègies, es recull l'ús de les estratègies de càlcul mental pròpies de la resta per resoldre problemes en els quals l'operació aritmètica que es demana és una resta. En concret, s'han escollit els resultats en els quals apareix una de les dues estratègies treballades al llarg de la intervenció pràctica: descompondre en nombres més petits (DNP) o sumar cap endavant (SCE). Es presenten a continuació:

	Prova de desembre		Prova d'abril	
Tipus de problema	**DNP**	**SCE**	**DNP**	**SCE**
Canvi-augment (canvi desconegut)	0	0	1	0
Canvi-augment (inici desconegut)	0	0	4	1
Canvi-disminució (canvi desconegut)	0	0	6	2
Canvi-disminució (inici desconegut)	0	0	5	1
Esquema parts-total (part desconeguda)	0	0	5	0

5. CONCLUSIONS I PROSPECTIVA

En aquest apartat es presenten les conclusions de l'estudi, mitjançant les quals es validen les hipòtesis d'investigació. També s'exposa la prospectiva de la investigació on es plantegen noves línies d'estudi per aprofundir en la recerca.

5.1 Conclusions

Per validar les hipòtesis d'investigació: *si es treballa específicament el propi procés de resolució de problemes amb els alumnes millora la seva comprensió a l'hora de resoldre'ls* i *si s'incideix directament en les dificultats detectades en l'ús de les estratègies per resoldre problemes additius, les estratègies aparegudes s'adeqüen al tipus d'operació aritmètica que es demana*; s'establirà una correspondència entre els resultats obtinguts i la teoria exposada.

Així doncs després d'aplicar la intervenció didàctica i de comparar i interpretar els resultats obtinguts, ara és el moment d'exposar les conclusions extretes.

Per una banda, si ens fixem en aquells aspectes relacionats amb la comprensió podem anunciar que:

- L'ensenyament de la resolució de problemes (*teaching about problem solving*), i més en concret ensenyar els passos del procés de resolució de problemes, provoca una millora de la comprensió dels infants a l'hora de resoldre un problema.

  Aquesta afirmació es recolza en la teoria exposada on diversos autors ratifiquen que ensenyar explícitament aquest procés ajuda als estudiants a millorar la comprensió i el seu raonament matemàtic (Polya, Van de Walle et al., Luceño). Això es manifesta en la comparació dels resultats, en els quals s'observa clarament un increment significatiu de la comprensió de l'enunciat en els tres tipus de problemes seleccionats i treballats específicament durant la intervenció. En concret, tal i com s'ha esmentat, es va incidir en les categories de: canvi-augment quan l'inici és desconegut (1C), de canvi-disminució quan l'inici és desconegut (2C) i d'esquema parts-total quan una part és desconeguda (3B).

Tot i això, cal subratllar que el nombre d'alumnes que milloren la comprensió en cada tipus de problema va disminuint progressivament, segons l'ordre en que s'han citat. Això no és estrany, ja que tal i com estableixen Carpenter et al. (1999) i Baroody (1988); aquests tres tipus de problemes són els més difícils dins la classificació dels problemes additius[9].

- Quan les proposicions són canòniques, tan d'addició com de subtracció, són més fàcils de resoldre que les no canòniques.

Aquests resultats tampoc són sorprenents, ja que el problema de canvi-augment quan el resultat és desconegut (proposició canònica) es fa servir per introduir la noció d'addició a les aules, tal i com assenyalen Carpenter et al. (1999). Per tant, els infants avaluats ja havien treballat específicament aquesta tipologia de problemes abans de la intervenció pràctica.

El mateix succeeix amb els problemes de canvi-disminució quan el resultat és desconegut. Tampoc és estrany que hi hagi un bon gruix d'alumnes que entengui el problema ja que aquest tipus és el que s'utilitza per introduir la noció de sostracció, degut a la posició final de la incògnita (Carpenter et al., 1999). De nou, en aquest problema la proposició també és canònica.

A més a més, cal afegir que aquestes dues tipologies de problemes corresponen a les que Carpenter i el seu grup d'investigadors (1999) assenyalen com a més fàcils de resoldre. Per tant, aquest és un altre motiu pel qual podem afirmar que els resultats obtinguts coincideixen amb les investigacions fetes.

- Quan la incògnita està situada el més a la dreta possible de la proposició, és a dir, quan l'inici és desconegut, incrementa notablement el grau de dificultat del problema.

[9] Quan diem els més difícils dins la classificació dels problemes additius ens referim únicament a les tres primeres categories: canvi –augment o disminució–; i esquema parts-total; treballades durant la intervenció didàctica.

Aquests resultats són usuals ja que tal i com descriuen Carpenter i Moser (1983, citats a Puig i Cerdán, 1988) les proposicions de minuend desconegut (?–b=c) són significativament més difícils que les altres proposicions de sostracció (a -?= c; a-b= ?). Passa el mateix amb les proposicions additives. Això es manifesta en l'anàlisi dels resultats de la primera prova en la qual es detecten greus dificultats a l'hora de comprendre l'enunciat d'aquests tipus de problema. És per aquest motiu que es seleccionen aquestes tipologies de problemes per treballar durant la intervenció.

- Els resultats entre els problemes de canvi-augment quan el resultat és desconegut i els d'esquema parts-total quan el total és desconegut, són molt similars.

  El motiu d'aquesta semblança és conseqüència de la relació entre les quantitats, tal i com exposen Carpenter et al (1999). Així doncs en totes dues tipologies l'acció descrita és la mateixa: la unió de dos conjunts. És per això que no és rar que en ambdues proves els resultats pràcticament no variïn.

Per altra banda, si parem atenció en els aspectes lligats a l'ús d'estratègies, podem certificar que:

- L'ensenyament per a la resolució de problemes (*teaching for problem solving*), concretament si s'ensenyen estratègies de càlcul mental pròpies de la resta, millora l'ús i l'adequació de les estratègies quan l'operació que es demana a resoldre en el problema és una resta.

  Aquesta asserció es sosté en la teoria presentada en la qual diversos autors afirmen que ensenyar i treballar prèviament els continguts i les estratègies aritmètiques, ajuda als alumnes a millorar a l'hora de resoldre les operacions aritmètiques requerides (Polya, Van de Walle et al, Luceño). Això es manifesta en la comparació dels resultats, en els quals s'observa clarament un augment de l'ús i de l'adequació de les estratègies de sostracció.

A més, podem afirmar que la metodologia proposada per Parrish (2010) i que ha guiat aquest treball funciona. Les millores en l'ús i l'adequació de les estratègies de sostracció es deu a introduir les que proposa aquesta autora per resoldre mentalment les restes.

En concret, les dues estratègies de càlcul mental pròpies de la resta que es van treballar són la de descompondre en nombres més petits i la de sumar cap endavant. Els resultats obtinguts revelen un increment evident en l'ús d'aquestes estratègies, ja que en la primera prova cap alumne va utilitzar-les i en la segona més de la meitat dels infants les va fer servir per resoldre els problemes de sostracció.

Això ens condueix a verificar categòricament la segona hipòtesi plantejada a l'inici de la investigació. Tal i com s'ha exposat, treballar pròpiament les estratègies de càlcul mental de la resta ha promogut un augment de l'elecció adequada de l'estratègia en funció de l'operació aritmètica que demana el problema i, en conseqüència, un increment de les solucions correctes produïdes pels infants.

- Com a concreció de la conclusió anterior, podem afirmar que la resolució dels problemes millora gràcies a la utilització d'estratègies adequades – descompondre en nombres més petits i sumar cap endavant– quan la xifra de les unitats del subtrahend és més gran que la xifra de les unitats del minuend, sense fer servir nombres negatius.

- A mesura que els infants van aprenent estratègies de càlcul mental van aplicant aquests coneixements formals en la resolució de problemes i, per tant, disminueixen les estratègies lligades al coneixement informal.

Aquests resultats són els habituals, ja que tal i com explica Baroody (1988), l'evolució ordinària dels tipus de coneixement matemàtic és: intuïtiu, informal i formal. Així doncs, una vegada els alumnes són capaços d'utilitzar símbols i procediments escrits, s'adonen de la eficàcia de la matemàtica formal i passen a fer-ne ús. Per exemple, alguns errors de comptatge precisament són conseqüència de les limitacions de la matemàtica informal, ja que a mesura que els nombres augmenten la seva utilitat disminueix.

- Els resultats constaten que tot i conèixer i saber aplicar correctament les estratègies ensenyades durant la intervenció pràctica, la majoria dels infants s'ajuden del paper com a suport. El motiu és que els infants necessiten practicar i treballar directament les estratègies pròpies de les operacions aritmètiques durant llargs períodes de temps. En aquest cas, les estratègies pròpies de la resta és van treballar únicament durant 8 setmanes, que es corresponen amb l'aplicació de la seqüència didàctica, abans de passar la segona prova.

  Per tant, és normal que els infants facin servir estratègies ja conegudes, si s'adonen que poden resoldre l'operació mitjançant aquestes; o bé que intentin buscar altres vies per arribar a la solució, per exemple utilitzant la propietat matemàtica de l'operació inversa. Dit d'altra manera, transformar les restes en sumes. O bé, utilitzant procediments concrets amb el suport d'objectes.

  Aquesta idea queda reforçada per Baroody (1988) al afirmar que és habitual que els infants tot i conèixer els mètodes formals, continuïn utilitzant els procediments concrets durant molt de temps. És per aquest motiu que en l'anàlisi de la primera prova s'observa que alguns alumnes no estan segurs de l'abstracte i fan servir la modelització d'objectes per resoldre el problema i arribar a un resultat correcte.

Per últim, es fa necessari relacionar els aspectes entorn a la comprensió i a les estratègies per corroborar que:

- Si els alumnes tenen comprensió però els manquen les estratègies no poden resoldre els problemes.

  Aquesta declaració queda reforçada pels autors, els quals afirmen que si el resolutor no coneix les estratègies o els càlculs que cal dur a terme no podrà concebre un pla adequat per resoldre aquell problema (Pólya, Luceño).

- Si els alumnes tenen estratègies però els manquen la comprensió no poden resoldre els problemes.

  Aquesta asserció es sosté en la teoria, concretament quan Polya (1970) defensa que la comprensió de l'enunciat és un aspecte essencial en la resolució de problemes. Tal i com manifesten els resultats, encara que els alumnes coneguin moltes estratègies sinó entenen què demana l'enunciat rarament podran aplicar cap tècnica vàlida que els condueixi a obtenir un resultat correcte.

Aquestes conclusions demostren la necessitat de treballar conjuntament la comprensió i les estratègies en la resolució de problemes, per tant, són continguts que han d'anar necessàriament en paral·lel.

Abans d'acabar m'agradaria incidir en les últimes conclusions ja que són les que atorguen un sentit global a la investigació. És a dir, si aquest treball s'hagués encaminat únicament a identificar les estratègies que utilitzen els infants a l'hora de resoldre problemes de suma i resta, la recerca hagués quedat molt limitada. Tal i com s'ha descrit la comprensió del problema és un pas clau en l'ensenyament de la resolució de problemes. En paraules de Hiebert et al. (1996: 15) "tractar i examinar acuradament procediments específics com els problemes a l'escola ajuda als estudiants a comprendre'ls i a poder-los utilitzar de manera més eficaç.".

Finalment, per tot l'esmentat anteriorment, puc afirmar que mitjançant aquesta recerca he assolit els quatre objectius que m'havia marcat inicialment, a més de verificar les dues hipòtesis d'investigació plantejades. Tot i això, per continuar en aquesta línia ascendent de millores en la comprensió i en les estratègies a l'hora de resoldre problemes caldria continuar insistint en el propi procés de resolució fins que la totalitat dels infants la tingui assolida, a més de treballar problemes de totes les tipologies, tan oberts com tancats, i diversificar l'ensenyament d'estratègies pròpies tan de la suma com de la resta. Sota el meu punt de vista, aquestes accions serien les que integrarien i haurien de guiar la següent intervenció educativa.

5.2 Prospectiva

Com s'ha exposat al llarg dels capítols anteriors, aquesta recerca facilita informació sobre la manera com els alumnes de 2n de primària resolen problemes de suma i resta. Concretament, la recollida de dades està encaminada a la comprensió i a les estratègies utilitzades pels infants. Tot i això, és evident que aquest estudi té unes limitacions temporals importants que fan que no es puguin abordar tots els aspectes amb suficient profunditat.

Tanmateix, a partir de l'anàlisi de les dades obtingudes es pot aprofundir en l'àmbit de la recerca d'estudi, a més de possibilitar l'obertura de noves línies d'investigació. Algunes d'elles podrien ser les següents:

- Aprofundir/ Analitzar la incidència de l'ensenyament del propi procés de resolució en infants de primària a l'hora de resoldre problemes.

- Detectar i aprofundir en els motius pels quals els alumnes manifesten errors greus en la comprensió dels enunciats.

- Plantejar el mateix estudi en un altre centre educatiu per aprofundir en l'anàlisi de la comprensió i de les estratègies que utilitzen els alumnes de 2n de primària per resoldre problemes de suma i resta.

- Ampliar la mostra d'infants per tenir més dades i poder determinar amb l'exhaustivitat més gran possible la comprensió i les estratègies dels infants a l'hora de resoldre problemes additius.

6. VALORACIÓ FINAL

A continuació s'exposen algunes reflexions i valoracions en relació als aprenentatges del Grau de Mestre d'Educació Primària i de la futura professió.

En primer lloc, m'agradaria exposar que aquest treball de recerca m'ha servit endinsar-ne en una branca de l'educació, centrada en la investigació, que desconeixia. Alhora m'ha fet prendre consciència de la importància de la recerca en la investigació, en particular de la investigació educativa. Al llarg del Grau en Mestre d'Educació Primària he elaborat una gran quantitat de treballs teòrics i didàctics, però en gairebé cap ha pres rellevància la literatura escrita sobre la temàtica de treball o la discussió. En comptades ocasions havia buscat i seleccionat diferents autors de referència sobre un contingut concret i els havia triangulat per tal de seleccionar de cadascun els aspectes que més m'interessaven pel treball. Per tot això penso que és important assenyalar els nous aprenentatges fets. En el meu nou entendre, la recerca es conceptualitza com una indagació sistemàtica i rigorosa, els resultats de la qual es faran públics a través d'un informe o una memòria d'investigació.

En segon lloc, i molt vinculat al primer punt, considero que aquesta investigació també m'ha fet adonar de la complexitat i de la dificultat que suposa posar en pràctica una investigació-acció, perquè més enllà de recollir i de comparar dades, aquesta metodologia educativa té com a objectiu introduir canvis amb l'objectiu de millorar l'acció educativa i augmentar-ne la comprensió. En el cas concret d'aquesta recerca, la finalitat era instaurar canvis en el procés de resolució de problemes per tal de provocar una millora dels factors que poden condicionar la comprensió i les estratègies aparegudes a l'hora de resoldre problemes de suma i resta. El fet d'aplicar una investigació d'aquest estil amb un grup de persones real, a l'inici em feia força respecte. Era conscient que totes les meves bones o males decisions tindrien conseqüències i repercutirien directament en aquell col·lectiu concret. Superar les dificultats, els temors i, sobretot aprendre dels errors, penso que és altre dels aprenentatges fets.

En tercer lloc, centrant-me en l'àmbit de la recerca, afirmo que els aprenentatges fets en relació a com els infants aprenen a resoldre problemes són extensos i profunds. Crec fermament que encaminar la temàtica d'estudi a l'àrea de coneixement de Didàctica de les Matemàtiques i centrar-la en el procés matemàtic específic: la resolució de problemes; va ser un encert. A mesura que aprofundia en aquesta recerca m’adonava de la gran quantitat de temes, tots ells interessants, que havia de deixar al marge per acotar-me als objectius i les hipòtesis d’investigació que guien aquest treball.

En quart lloc, en relació a la intervenció pràctica, voldria remarcar la meva satisfacció per l’actuació realitzada dins del centre de *Pràctiques III*. Penso que la meva intervenció va ser positiva tan pels infants i la tutora com per mi mateixa. Els aprenentatges fets durant la intervenció pràctica van ser mutus. Va ser especialment interessant i profitós el doble *feedback* que es va establir: mestres-alumnes i mestra-mestra. De la mateixa manera, m’agradaria subratllar els coneixements adquirits en la recollida de les dades, concretament durant la prova individual passada als infants, tan al mes de desembre com al mes d’abril. El fet de passar moltes hores observant la manera com els alumnes resolien els problemes em va permetre aprendre moltes coses. És per això que valoro molt positivament aquestes sessions “personalitzades” amb els alumnes.

Per acabar, voldria ratificar que l’elaboració d’aquesta recerca m’ha permès acabar de constatar que les *Matemàtiques a l’Educació Primària* és l’àrea de coneixement didàctic en el qual tinc veritable interès i ganes de seguir aprendre i investigant.

7. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

- BAROODY, Arthur J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. Madrid: Visor distribuciones.

- BLANCO, J.L. (1996). "La resolución de problemas. Una revisión teórica". *Suma*, núm. 21, 11-20.

- CAI, Jinfa; LESTER, Frank (2010). *Why is teaching with problem solving important to student learning?.* Reston, VA: NCTM.

- CANALS, Maria Antònia (2010). *Problemes i més problemes*. Barcelona: Rosa Sensat- Els dossiers de la Maria Antònia Canals, 107.

- Dins CARPENTER, T.P.; MOSER, J.M; ROMBERG, T.A. (1982) *Addition and subtraction: a congnitive perspective*. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

- CARPENTER, Thomas P.; FENNEMA, Elizabeth; PETERSON, Penelope L., CAREY, Deborah A. (1988). "Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic". *Journal for research in Mathematics Education*, vol. 19, núm. 5, 385-401.

- CARPENTER, T.; FENNEMA, E.; FRANKE, M.L.; LEVI, L.; EMPSON, S.B. (1999) *Children's Mathematics. Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

- DEPARTAMENT D'EDUCACIÓ (2009). *Currículum Educació Primària*. Barcelona: Generalitat de Catalunya.

- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2010). *La resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños.* Madrid: Grupo Mayéutica.

- GODINO, Juan D. (2010). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica*. Granada: Universidad de Granada*.* Revisió i ampliació de GODINO, J. (1991). *Area de conocimiento: didàctica de la matemàtica.* "Hacia una teoría de la educación matemàtica". Madrid: Síntesis.

- *Gran Diccionari de la Llengua Catalana*. Barcelona: Grup Enciclopèdia Catalana.

- HIEBERT, James; CARPENTER, Thomas P.; FENNEMA, Elizabeth; FUSON, Karen; HUMAN, Piet; MURRAY, Hanlie; OLIVIER, Alwayn; WEARNE, Diana (1996). "Problem Solving as a Basis for Reform in Curriculum and Instruction: The Case of Mathematics". *Educational Researcher*, vol. 25, núm. 4, 12-21.

- KANTOWSKI, M. G. (1981). "Mathematics Educations Research Implications for the 80's". *Problem Solving,* núm. 4, 111-126.

- LATORRE, Antonio (2004). "La investigación acción". Dins Rafael Bisquerra (coord.). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

- LUCEÑO, José Luis (1999). *La resolución de problemas aritméticos en el aula*. Málaga: Aljibe.

- MAYER, R.E.; WITTROCK, R.C. (2006). *Problem solving*. Dins ALEXANDER, P.A; WINNE, P.H. (Eds.), *Handbook of educational psychology* (2nd ed., pp. 287–304). Mahwah, NJ: Erlbaum.

- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

- PARRISH, Sherry (2010). *Number Talks. Helping children build mental math and computation strategies. Grades K-5*. California: Math Solutions.

- PERALES, F. Javier (2000). *Resolución de problemas*. Madrid: Síntesis.

- POLYA, George (1970). *Como Plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

- PUIG, Luís; CERDÁN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

- RUBINSTREIN, S.L. (1966). *El proceso del pensamiento*. La Habana: Universitaria.

- SCHOENFELD, Alan H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

- SCHOENFELD, Alan H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*. Dins D. Grows (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 334-370). New York: MacMillan.

- SMALL, Marian (2010). *Good questions: great ways to differentiate mathematics instruction.* Nova York: Columbia University.

- SELLAS, Isabel (2009). *Creences dels estudiants de mestre sobre els problemes de matemàtiques: identificació i estudi*. Cerdanyola del Vallès: Universitat Autònoma de Barcelona.

- VAN DE WALLE, Jonh A.; KARP, Karen S.; BAY-WILLIAMS, Jennifer M. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally. Eighth edition*. New Jersey: Pearson.

- VILA, Antoni; CALLEJO, Mª Luz (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: el papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid: Narcea.